数理解析研究所講究録
64巻 1969年 1-64

コンパクト正曲率リーマン多様体の構造
── 測地線論を用いて ──

農工大　中川久雄
東工大　塩浜勝博

§0. Introduction.

我々が考える多様体Mは n-次元($n \geqq 2$)連結、コンパクトなリーマン多様体で、Mの断面曲率は至る所正とする。測地線を用いてMの構造を調べるときに重要な手がかりの1つとして、exponential mapが1対1に対応する近傍の大きさを表わすcut locusの距離評価がある。又、もう1つの重要な手がかりとしてMのdiameter $d(M)$の評価がある。今迄に解明された範囲では、前者は断面曲率の最大値とMの基本群に、後者は断面曲率の最大値とMの基本群に夫々深い関係がある。しかしこれらの評価の問題は未解決の所が多い。

さて、「Mの位相的構造と曲率の最大値、最小値とを固定して、Mを変化させたときに、上記2つの値のinf., supをattainするMは何か?」と云う問題を考えたとき、正定曲率空間、コンパクト対称空間(階数1)といった具体例がしばしば現れる。

従ってこの様な場合には、ある特定の長さを持つ閉測地線がMに存在する。そこで「Mの曲率の最大、最小値を固定したとき、もしもMがある特定な長さの閉測地線を持つならばMの構造が決定されないか？」と云う問題を考える。

以下では今迄に、Toponogov, Klingenberg, Berger, 塚本等により研究された諸結果を述べ、もしも存在するならばそれらの内に含まれている問題点を指摘し、著者達の研究も紹介する。

§1. 準備.

Mはn次元$(n \geqq 2)$連結、コンパクトなC^∞級リーマン多様体で、Mの任意のplane element σの決定する断面曲率K_σは

(1) $$0 < \delta \leqq K_\sigma \leqq 1$$

を満たすものとする。既存の諸定理をあげる。

定理1 (Myers [11]) 連結、完備なMの断面曲率K_σがMの全てのplane element σに対して$0 < \delta \leqq K_\sigma$を満たせば、Mはコンパクトで、Mのdiameter $d(M)$は$d(M) \leqq \pi/\sqrt{\delta}$を満たす。

定理2 (Rauchの比較定理[17], [12])

M, $\tilde{M}$は同次元リーマン多様体で、$\Gamma = \{\gamma(t)\}$ $(0 \leqq t \leqq l)$, $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}(t)\}$ $(0 \leqq t \leqq l)$は夫々M, $\tilde{M}$の測地線分とする。Y, $\tilde{Y}$はΓ, $\tilde{\Gamma}$に沿うJacobi場で$Y(0) = \tilde{Y}(0) = 0$, $\langle Y'(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle \tilde{Y}'(0), \dot{\tilde{\gamma}}(0) \rangle = 0$、かつ$\| Y'(0) \| = \| \tilde{Y}'(0) \|$なるものとする。$\tilde{\Gamma}$は$(0, l)$に0の共役点を持た

ず, $K_{\tilde\sigma} \geqq K_\sigma$ が任意の $t \in [0,\ell]$, $\sigma, \tilde\sigma$ ($\pi(\sigma) = \gamma(t)$, $\pi(\tilde\sigma) = \tilde\gamma(t)$) に対して成り立つならば $\|Y(t)\| \geqq \|\tilde Y(t)\|$ が $0 \leqq t \leqq \ell$ に対して成立する。

M上の2点 p, q に対して p から q への最短測地線分の全体を $G(p,q)$ と書くことにする。測地線 $\Gamma = \{\gamma(t)\}$ $(0 \leqq t \leqq \ell)$ は弧長をパラメーターにとることにする。Mの3点 p, q, r を頂点とする測地三辺形 $\Delta = \Delta(\Gamma, \Theta, \Sigma)$ とは次の条件をみたす tripple (Γ, Θ, Σ) のことを云う。

(1) $\Gamma \in G(q,r)$ (or $G(r,q)$), $\Theta \in G(r,p)$ (or $G(p,r)$)
$\Sigma \in G(p,q)$ (or $G(q,p)$)

(2) $p \neq q \neq r \neq p$ 。

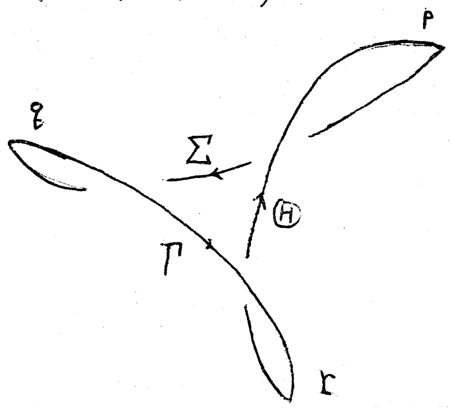


Fig 1

M上に3点 p, q, r と $\Gamma \in G(r,q)$, $\Theta \in G(r,p)$ をとり, $\Gamma = \{\gamma(t)\}$ $(0 \leqq t \leqq a)$, $\Theta = \{\theta(t)\}$ $(0 \leqq t \leqq b)$ とする。3点 $\gamma(s), r, \theta(t)$ を頂点にもつ任意の測地三辺形に対応する $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$ 上の等長な三辺形 $\tilde\Delta(\tilde\gamma(s), \tilde r, \tilde\theta(t))$ に於て、$\tilde r$ に於る頂角 $\measuredangle(\tilde\gamma(s), \tilde r, \tilde\theta(t)) \equiv \alpha(s,t)$ とおいたとき次が成立する。但し S^n_r は半径 r の標準的 n-次元球を表わす。

定理3 (Toponogov [19], Convexity Condition)

P, Q, R を3頂点にもつ測地三辺形 $\Delta=\Delta(\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R})$ の周長が $2\pi/\sqrt{\delta}$ 未満ならば、$0\leqq s_1\leqq s_2\leqq a$, $0\leqq t_1\leqq t_2\leqq b$ なる任意の s_1, s_2, t_1, t_2 に対して $\alpha(s_1,t_1)\geqq\alpha(s_2,t_2)$ が成立する。

これを基本的に用いて導びかれた定理として

定理4 (Toponogov [19])

完備な M が (1) を満たすとき

(1) 任意の測地三辺形 $\Delta(\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R})$ の周長は $2\pi/\sqrt{\delta}$ をこえない。

(2) 周長が $2\pi/\sqrt{\delta}$ なる $\Delta(\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R})$ が存在したとき

(a) $(\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R})$ の各辺の長さが他の2辺の長さの和より小ならば、$(\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R})$ は単純閉測地線であり特に $d(M)=\pi/\sqrt{\delta}$ となる。

(b) 辺長が $\pi/\sqrt{\delta}$ なる辺が存在するならば $d(M)=\pi/\sqrt{\delta}$ である。

(3) $d(M)=\pi/\sqrt{\delta}$ ならば M は $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$ に等長である。

定理3、定理4より導びかれる結果として

定理5. (Toponogov [19], 球面比較定理)

M の任意の測地三辺形 $\Delta(\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R})$ に対して、$S^2_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$ 上の三辺形 $(\tilde{\mathfrak{P}},\tilde{\mathfrak{Q}},\tilde{\mathfrak{R}})$ を対応辺が等長になるようにとったとき、M が $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$ に等長の場合には Δ に合同な $\tilde{\Delta}$ を採用すると云う規約の下に、2つの三辺形 $\Delta, \tilde{\Delta}$ の対応角は Δ の方が小さくない。

以下 M の要素に対応する $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$ 上の要素には「~」をつけて表わすことにする。Synge の Lemma を利用して Klingenberg は

次の評価を得た。

定理 6 (Klingenberg[5])

Mは連結、コンパクトな偶数次元リーマン多様体で(1)をみたす時、

(1) Mが orientable ならば $d(p, C(p)) \geqq \pi$, for any $p \in M$,

(2) Mが non-orientable ならば $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ であり $d(p, C(p)) \geqq \pi/2$

が任意の$p \in M$に対して成立する。

更に一般次元の多様体のときはモース理論を用いて次を得た。

定理 7 (Klingenberg[7])

Mはコンパクト、単連結なリーマン多様体で、$1/4 < \delta \leqq K_\sigma \leqq 1$

をみたすならばMの任意の点pに対して

$$d(p, C(p)) \geqq \pi \tag{2}$$

が成立する。

この評価式を用いて次の定理が導びかれる

定理 8 (Klingenberg[7], Sphere Theorem)

単連結なMが $1/4 < \delta \leqq K_\sigma \leqq 1$ をみたせばMはS^nに同相である。

定理 9 (Berger[1])

偶数次元コンパクト、単連結なMが $1/4 \leqq K_\sigma \leqq 1$ をみたすとき、

(1) $d(M) = \pi$ ならばMは標準的計量をもつ rank 1 のコンパクト対称空間に等長である。

(2) $d(M) > \pi$ ならばMはS^nに同相である。

これらの諸定理は全て完全にcheckされた(少なくとも著者達には)ので、以下の推論の根拠とする。証明は全て省略する。以下、Mはn-次元、連結、コンパクトなリーマン多様体で(1)が成立するものとし、かようなMのみを考える。

§2、diameterの評価に関連した諸問題。

定理1により$d(M) \leq \pi/\sqrt{\delta}$であるが、$d(M) = \pi/\sqrt{\delta}$のときMが$S^n_{\sqrt{\delta}}$に等長になることがTоponogovにより証明された。そこでMに長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の単純閉測地線が存在したときMは$S^n_{\sqrt{\delta}}$に等長になるであろうか?一般には反例があるので無条件には云へない。$n=3$のときorder 3のcyclic group Gで生成元σが$\sigma = \begin{bmatrix} R(1/3) & \\ & R(1/3) \end{bmatrix}$をもつもので$S^3_{\sqrt{\delta}}$を割って作ったレンズ空間$L(1,3)$上には長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の単純閉測地線が存在する。この例では長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の単純閉測地線は4本の最短測地線分で4等分されている(以下この場合を閉測地線が四辺形分割されたと云うことにする)。

Toponogovは次の定理を主張している。

定理2.1 (Toponogov [18])

2次元単連結なM上に長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の単純閉測地線が存在すればMは$S^2_{\sqrt{\delta}}$に等長である。

注意1、「単純閉測地線とはself intersectしない閉測地線のことである。

さて、長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の閉測地線が三辺形分割されているならば(必然的に単純になり)定理4によってMは$S^2_{1/\sqrt{\delta}}$に等長となる。そこで塚本は次の定理(予想)を与えた。

定理2.2 (Tsukamoto [20])
単連結なMが$1/4 \leq \delta \leq K_\sigma \leq 1$をみたし、Mに長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の単純閉測地線が存在すればMは$S^n_{1/\sqrt{\delta}}$に等長である。

注意2. この証明には間違いがあるので予想の段階にとどまる。

さて、杉本は長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の単純閉測地線が四辺形分割されている場合球に等長になるか否かを考えた。彼女の得た結果は以下である。

定理2.3 (Sugimoto [16])
Mは長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の単純閉測地線Γで四辺形分割可能であるものを許容したと仮定する。もしもΓの向かい合った辺の長さが等しくないならばMは$S^n_{1/\sqrt{\delta}}$に等長である。

定理2.4 (Sugimoto [16])
$1/4 \leq \delta \leq K_\sigma \leq 1$をみたすMが四辺形分割可能な長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の単純閉測地線$\Gamma$をもつとき、もしも$\Gamma$の四辺の長さが全てが同時に等しくないならばMは$S^n_{1/\sqrt{\delta}}$に等長である。

注意3. Mが単連結で、$\delta > 1/4$のとき、もしも長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の閉測地線(単純である必要は全くない!)が存在すれば

MはS^n_{δ}に等長である。

注意4. 定理2.4では単連結を仮定しない。一般に$d(M)>\pi/2\sqrt{\delta}$ならばMは単連結となり(補題2.10)、この場合には単連結が仮定から導びかれる。しかし「単連結なMが$1/4 \leqq \delta \leqq K_\sigma \leqq 1$のとき、四辺形分割できる長さ$2\pi/\sqrt{\delta}$の閉測地線(単純)を持てば、Mは$S^n_{\delta}$に等長である。」が成立するか否かは未解決である。

注意5. 定理2.4で全ての辺長が同時に$\pi/2\sqrt{\delta}$に等しい場合、レンズ空間$L(1,3)$があるのでこの仮定は除外できない。

注意6. Klingenberg [8] は完備、単連結なMが$1/4 \leqq K_\sigma \leqq 1$をみたすならば、Mの任意の点pに対して$d(p, C(p)) \geqq \pi$が成立すると主張している。しかしこの定理の証明には大きな論理的飛躍があり、完全にfollowできない。この問題点は末節の補意を参照されたい。本稿ではこの「定理」を定理と認めない立場をとる。もしこの「定理」が定理であるならば、塚本の予想は肯定的に解決されることが示される。その場合の証明は次の定理の証明と全く同じである。

定理2.5 (Sugimoto [16])
偶数次元単連結なMが$1/4 \leqq \delta \leqq K_\sigma \leqq 1$をみたし、長さが$2\pi/\sqrt{\delta}$の閉測地線(単純であることは仮定する必要ない)がMに存在すればMはS^n_{δ}に等長である。

さて、上述の諸結果は目標を球においたものであった。そこで単連結でないMを考えよう。この場合 $d(M) \leqq \pi/2\sqrt{\delta}$ であるが、特に $d(M) = \pi/2\sqrt{\delta}$ となる場合に注目しよう。Example としては、$PR^2(\delta)$, $S^3_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$ を order k の cyclic group G で生成元が $\begin{bmatrix} R(1/k) & \\ & R(1/k) \end{bmatrix}$ をもつもので割って作った $L(1,k)$。又、$\delta = 1/4$ の場合には rank 1 のコンパクト対称空間等がある。さて、$d(M) = \pi/2\sqrt{\delta}$ なる仮定に更に追加の条件をつけ加えて、Mの構造が決定できないかを調べる。

定理2.6 (Shiohama [15])

Mは $1/4 < \delta \leqq K_\sigma \leqq 1$ を満たし、$\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ と仮定する。もしも $d(M) = \pi/2\sqrt{\delta}$ ならばMは $PR^n(\delta)$ に等長である。又、もしも長さ $\pi/\sqrt{\delta}$ の閉測地線がMに存在すれば、Mは $PR^n(\delta)$ に等長である。

定理2.7 (Shiohama [15])

Mは $1/4 < \delta \leqq K_\sigma \leqq 1$ を満たすものとする。次のいずれの場合にもMは曲率 δ の定曲率空間となる。

(1) $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_3$ で、長さ $2\pi/3\sqrt{\delta}$ の閉測地線が存在する。

(2) $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_4$ で、長さ $\pi/2\sqrt{\delta}$ の閉測地線が存在する。

注意7. 定理2.6，2.7に於て $\delta > 1/4$ なる仮定はMの universal covering manifold $\tilde{M}$ に於て cut. locus の距離評価が π 以上であることを保証する為につけられた苦しい仮定で

ある。これらの証明の根本は注意3にある。

この節の最後に $d(M)$ の infimum に注目した Berger の結果を紹介する。

定理2.8 (Berger [3])

M はコンパクト、単連結、偶数次元リーマン多様体で、(1) をみたすものとする。もしも $d(M)=\pi$ ならば、M の測地線は全て長さ 2π の単純閉測地線である。

注意8、Bott の定理[ ]によりこのとき M の homology group は rank 1 のコンパクト対称空間のそれと同型的になる。

以上の諸結果の証明は§4で与えることにして、次に cut locus の評価に関連した問題を考えよう。

§3. Cut locus の評価に関連した諸問題。

M 上の関数 $p \longrightarrow s(p) \equiv d(P, C(p))$ は下に半連続な関数であるから M のコンパクト性により M 上で最小値 s_0 をとる。M の各点 p に於る接空間 M_p 内の中心 0、半径 s_0 の開球内では $\exp_p$ は1対1にその像と対応する。s_0 の値については(定理6、定理7に於て)δ が M に適当な条件がつけば調べられている。

我々は s_0 の値が attain される M が特に、長さ $2s_0$ の閉測地線を許容する場合を考える。一般に s_0 の値が attain される M には長さ $2s_0$ の閉測地線が存在すると云う保証はない。しかし長さ $2s_0$ の閉測地線が M に存在すれば、その M は

$d(p_0, C(p_0)) = \delta_0$ なる p_0 をもつ。

定理3.1 (Klingenberg [6])

Mはコンパクト単連結な2次元リーマン多様体で、MのGauss曲率Kは至る所 $0 < K \leqq 1$ を満たすものとする。Mの単純閉測地線分は長さが 2π 以上であり、もしも長さ 2π の単純閉測地線分がMに存在すればMは S_1^2 に等長である。

定理3.2 (Klingenberg [6])

定理3.1と同じMに於ては、Mの任意の点pに於て $d(p, C(p)) \geqq \pi$ が成立する。特に、$d(p, q) \leqq \pi$ が任意の点qに対して成立するようなpがMに存在すればMは S_1^2 に等長である。

注意9. これより直ちに2次元コンパクト単連結なMが $0 < K \leqq 1$ で $d(M) = \pi$ ならばMは S_1^2 に等長である。

また偶数次元多様体の場合には

定理3.3 (Tsukamoto [20])

Mは偶数次元単連結なリーマン多様体で、$1/4 \leqq K \leqq 1$ とする。Mに長さ 2π の閉測地線が存在すればMは標準的計量をもつ、rank 1のコンパクト対称空間の1つに等長である。又特に $1/4 < K \leqq 1$ ならばMは S_1^n に等長である。

注意10. 塚本の原論文では偶数次元を仮定していない。この証明はcut locusの距離評価が π 以上であることをessentialに使うために偶数次元の仮定が前半の主張に於ては必要であ

る。一般に「コンパクト単連結な M が $0<K_\sigma\leqq 1$ をみたすとき M の任意の点 p に於て $d(P, C(P))\geqq\pi$ である。」と云う命題は真でないことが Berger[ ] により示されている。

次に単連結でない M について得られた結果を述べる。

定理 3.4 (Shiohama [15])

M はコンパクトリーマン多様体で $1/4<\delta\leqq K_\sigma\leqq 1$ をみたし、$\pi_1(M)=Z_k$ とする。M に長さ $2\pi/k$ の閉測地線分が存在すれば M は曲率 1 の定曲率空間である。

特に 3 次元、正定曲率リーマン多様体については Spherical Space Form Problem により M は S^3_1/G となり、運動群 G が完全に分類されている。詳細は Wolf の本を参照されたい[21]。§2 の定理 2.7 に述べた正定曲率空間は、次元を 3 と仮定した場合、いかなる運動群 G で $S^3_{1/\delta}$ を割ったものになるか不明である。しかし我々は次の結果を得た。

定理 3.5 (Shiohama [15])

M はコンパクト可符号な 3 次元リーマン多様体で、$\pi_1(M)=Z_k$ であり、$1/4<\delta\leqq K_\sigma\leqq 1$ とする。M に長さ $2\pi/k$ の閉測地線分が存在するならば、M は $L(1,k)$ に等長である。但し、$L(1,3)=S^3_1/G$ で、G は order k の cyclic group でその生成元の1つ $h=\begin{bmatrix} R(1/k) & \\ & R(1/k)\end{bmatrix}$，ここに $R(\theta)$ は平面の回転で、$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta\\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta\end{bmatrix}$ を表わす。

§4. 定理2.1—定理2.8の証明。

この節は§2であげた定理を証明する。しかし定理2.1については完全にfollowできないので疑問な点を指摘することにとどめる。

I. 定理2.1について。

補題　M内の最短測地線分により構成された多角形Pが凸多角形ならばPの周長は$2\pi/\sqrt{\delta}$をこえない。

証明. MはPにより2つの単連結なdomain D, $\bar{D}$に分けられる。Pに沿って$\bar{D}$をDに貼りつけて得られた曲面を$\bar{M}$とする。Alexandrovの定理によって$\bar{M}$は閉曲面であり$K \geqq \delta$を満たす。Pの頂点を$A_0, A_1, \cdots, A_k$としたとき、$\bar{M}$内の最短測地線分でA_0A_iを結ぶ。A_0, A_i, A_{i+1}を頂点とする三辺形$\Delta_i = \Delta_i(A_0, A_i, A_{i+1})$に対応する$S^2_{\delta}$上の等辺な三辺形$\tilde{\Delta}_i = \tilde{\Delta}_i(\tilde{A}_0, \tilde{A}_i, \tilde{A}_{i+1})$を作る。$\tilde{\Delta}_2$を$\tilde{\Delta}_1$と辺$\tilde{A}_0\tilde{A}_2$を共有する様に$\tilde{\Delta}_1$の外側に作図し、以下同様に$\tilde{\Delta}_{k-1}$まで作図する。定理5により

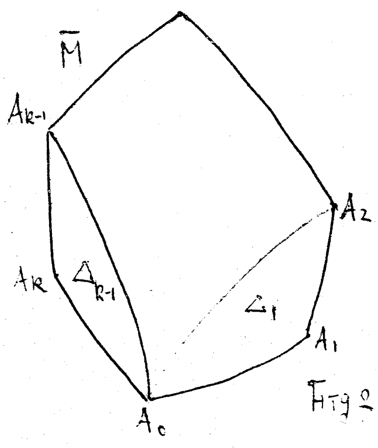


Fig 2

$(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_k)$は$S^2_{\delta}$上の凸多角形になり、従って周長は$2\pi/\sqrt{\delta}$をこえない。もしこの周長が$2\pi/\sqrt{\delta}$に等しいならばこの多角形は大円もしくはlune(二辺形)になることは自明である。

11

定理の証明。長さ $2\pi/\sqrt{\delta}$ の単純閉測地線上に部分弧が最短測地線分になっているように分点をとり、それらの分点を順次 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ とする。この単純閉測地線によりMは2つのdomain $D, \bar{D}$ に分けられている。Alexandrovの貼りつけ定理により A_0, A_i はD内の最短測地線分で結ばれているのでこのとき $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \cdots \tilde{A}_k$ は $S^2_{1/\sqrt{\delta}}$ 上の大円になり、従って A_0 と A_0 の対点（閉測地線上の）までの距離が $\pi/\sqrt{\delta}$ になり定理4の(3)によって D 内では定曲率 δ になる。D を $\bar{D}$ に貼りつけて $\bar{D}$ で同様の考察を行なえば $\bar{D}$ 内でも定曲率 δ になり、Mは単連結であったから $S^2_{1/\sqrt{\delta}}$ に等長になる。

注意11. 上に述べたことはToponogovの論文[ ]を翻訳しただけであり、Alexandrovの貼りつけ定理が理解されていないので、この論証には根拠がない。

II 定理2.2について

注意6で述べた立場上、ここでは偶数次元を仮定する。単純閉測地を $\Gamma=\{\gamma(t) \mid 0 \le t \le 2\pi/\sqrt{\delta}\}$ とする。$\gamma(0)=\gamma(2\pi/\sqrt{\delta})=p$, $\gamma(\pi/2\sqrt{\delta})=q$, $\gamma(\pi/\sqrt{\delta})=r$, $\gamma(3\pi/2\sqrt{\delta})=s$ とおく。$\pi/2\sqrt{\delta} \le \pi$ だから各部分弧は最短測地線分になっている。$\Theta \in G(p,r)$ をとり、$\Theta=\{\theta(t) \mid 0 \le t \le \ell\}$ とおくとき、一般性を失うことなく $\angle(\dot{\gamma}(0), \dot{\theta}(0)) \le \pi/2$ としてよい。(p,q,r) を頂点とする測地三辺形に対して、$S^2_{1/\sqrt{\delta}}$ 上の三辺形 $(\hat{p},\hat{q},\hat{r})$ を $d(p,q)=d(\hat{p},\hat{q})$,

$d(p,r) = d(\hat{p},\hat{r})$, $\measuredangle(q,p,r) = \measuredangle(\hat{q},\hat{p},\hat{r})$ となるように定めれば、定理5に基づいて $d(\hat{q},\hat{r}) \geq d(q,r) = \pi/2\sqrt{\varepsilon}$ 。一方球面三角法を$(\hat{p},\hat{q},\hat{r})$に適用して $\cos d(\hat{q},\hat{r}) \geq 0$ 。従って $d(\hat{q},\hat{r}) \leq \pi/2\sqrt{\varepsilon}$ 。故に $d(\hat{q},\hat{r}) = \pi/2\sqrt{\varepsilon}$ となり矛盾は生じない。この証明方法では予想の段階にとどまるであろう。完全な証明は(偶数次元を仮定して)以下に示されるであろう。

III、定理3.4.5の証明.

まず、定理3を証明する。 $\Gamma = \{\gamma(t)\}(0 \leq t \leq 2\pi/\sqrt{\varepsilon})$ を四辺形分割可能な単純閉測地線として、辺を $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, $L(\Gamma_i) = a_i$ とおき、頂点は p, q, r, s とする(Fig 3 参照)。

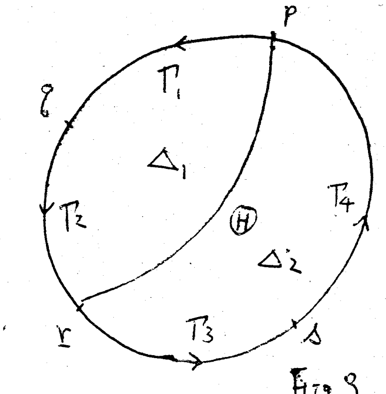


Fig 3

$\Theta \in G(p,r)$ をとり、$\Theta = \{\theta(t)\}(0 \leq t \leq l)$ とする。定理4に基づき $l < \pi/\sqrt{\varepsilon}$, $a_i < \pi/\sqrt{\varepsilon}$ なる場合のみ考える。$\Delta_1 = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Theta)$, $\Delta_2 = (\Theta, \Gamma_3, \Gamma_4)$ に対応する $S^2_{1/\sqrt{\varepsilon}}$ 上の等長な三辺形を夫々 $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ とし、$\hat{\Theta}$ を共有して、$\hat{\Delta}_2$ の外側に $\hat{\Delta}_1$ を作図する。このとき $(\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2, \hat{\Gamma}_3, \hat{\Gamma}_4)$ は $S^2_{1/\sqrt{\varepsilon}}$ 上の凸四辺形で周長が $2\pi/\sqrt{\varepsilon}$ である。$\theta'(l) \neq \pm\gamma'(l)$ なることと $l < \pi/\sqrt{\varepsilon}$ によって四辺形 $(\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2, \hat{\Gamma}_3, \hat{\Gamma}_4)$ は辺長が $\pi/\sqrt{\varepsilon}$ なる lune (二辺形) でなければならぬ。故に $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \pi/\sqrt{\varepsilon}$ 。$\Sigma \in G(q,s)$ に対しても同様にして $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ を得る。従って $a_1 = a_3, a_2 = a_4$

となり仮定に反する。即ち $l<\pi/\sqrt{\delta}$ 且つ $a_i<\pi/\sqrt{\delta}$ なる場合は我々の仮定の下には生起しない。

定理4を証明する為の準備として次の命題と補題を述べる。

命題4.1 (Sugimoto [16])

Mの3点 p, q, r を頂点にもつ測地三辺形 (Γ, Θ, Σ) に対応する等しい辺長をもつ S^2_{δ} 上の三辺形 $(\tilde\Gamma, \tilde\Theta, \tilde\Sigma)$ に於て、もしも $\measuredangle(p,q,r)=\measuredangle(\tilde p,\tilde q,\tilde r)$ ならば $\Sigma\in G(q,p)$, $\Gamma\in G(q,r)$ 上の任意の点 $\sigma(t)$, $\gamma(s)$ に対して $d(\sigma(t),\gamma(s))=d(\tilde\sigma(t),\tilde\gamma(s))$ が成立し、Γ, Σ を境界にもつ2次元全測地的曲面片で Gauss 曲率が一定値 δ となるものが存在する。

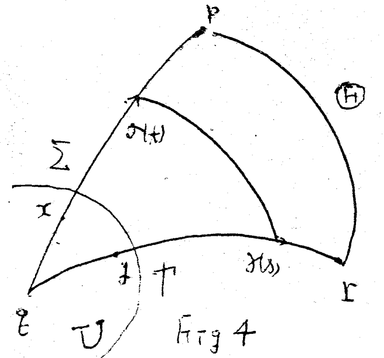


Fig 4

前半の証明。三辺形 $(\sigma(t), q, \gamma(s))$ に対応する S^2_{δ} 上の等長の三辺形 $(\tilde\sigma(t), \tilde q, \tilde\gamma(s))$ に於て、定理3と定理5から直ちに、$\measuredangle(\tilde\sigma(t), \tilde q, \tilde\gamma(s))=\measuredangle(\tilde{\tilde\sigma}(t), \tilde{\tilde q}, \tilde{\tilde\gamma}(s))$。従って2つの球面三辺形 $(\tilde\sigma(t), \tilde q, \tilde\gamma(s))$ と $(\tilde{\tilde\sigma}(t), \tilde{\tilde q}, \tilde{\tilde\gamma}(s))$ とは合同ゆえ $d(\tilde{\tilde\sigma}(t), \tilde{\tilde\gamma}(s))=d(\sigma(t),\gamma(s))=d(\tilde\sigma(t),\tilde\gamma(s))$。

後半の証明。

q を中心とした半径 2ε の M の凸球近傍を U とする（十分小なる $\varepsilon>0$ に対して）。$x\in\Sigma$, $y\in\Gamma$ を $d(q,x)<\varepsilon$, $d(q,y)<\varepsilon$ となるように任意にとって固定する。(x,q,y) に対応する S^2_{δ} 上の三辺形 $(\tilde x, \tilde q, \tilde y)$ をとり $\tilde\lambda\in G(\tilde x, \tilde y)$, $\tilde\lambda=\{\tilde\lambda(t)\}$ $(0\le t\le a)$

とすると明らかに $d(\breve{q}, \tilde{\lambda}(t)) < 2\varepsilon$ である。$\tilde{\Phi}_t \in G(\breve{q}, \tilde{\lambda}(t))$
$\tilde{\Phi}_t = \{\tilde{\varphi}_t(u)\}(0 \leqq u \leqq b_t)$ とおく。$\measuredangle(\tilde{\gamma}'(0), \tilde{\sigma}'(0)) = \measuredangle(\gamma'(0), \sigma'(0))$ だから $\breve{q}$ に於ける $\tilde{S}^n_{\breve{q}}$ の接空間から M_q への自然な isometric isomorphism ι_q を $\iota_q(\tilde{\gamma}'(0)) = \gamma'(0)$, $\iota_q(\tilde{\sigma}'(0)) = \sigma'(0)$ となるように定めることが可能である。明らかに $\tilde{\varphi}_t'(0)$ は $\tilde{\gamma}'(0)$ と $\tilde{\sigma}'(0)$ とが張る2次元部分空間に属する。従って $(t,u) \longrightarrow \varphi_t(u)$
$\left(\Phi_t = \{\varphi_t(u)\}(0 \leqq u \leqq b_t),\ \varphi_t(u) \equiv \exp_q \circ \iota_q \circ \exp_{\breve{q}} \tilde{\varphi}_t(u)\right)$ は M の2次元曲面片をなす。その終点の軌跡 $\Lambda = \{\lambda(t)\}(0 \leqq t \leqq a)$
$\exp_q \circ \iota_q \circ \exp_{\breve{q}}^{-1} \tilde{\lambda}(t) = \lambda(t)$ は U に属し、かつ $d(x, y) \leqq L(\Lambda)$ である。一方 Rauch の定理(定理2)が $\tilde{\Lambda}$ と Λ に対して使えて $L(\Lambda) \leqq L(\tilde{\Lambda}) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(x, y)$。故に $L(\Lambda) = d(x, y)$ となり Λ は一意に決まる最短測地線分となった。又このことから曲面上の任意の点に於ける接平面の決定する断面曲率は ε に等しい。さてこの曲面片が全測地的であることを主張するには、この曲面上の十分近い2点(任意)を結ぶ最短測地線分がこの曲面に含まれていることを示せば十分である。

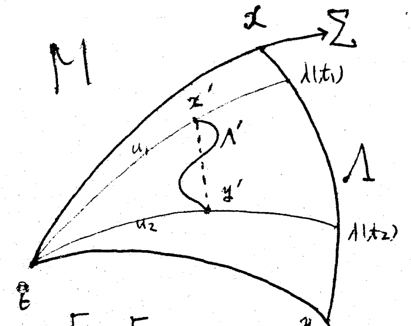


Fig 5

作り方からこの曲面片は q を中心とする星状形をなす。今、距離が M の基本弧長より小なる任意の2点 x', y' をこの曲面上にとり、$f = \exp_q \circ \iota_q \circ \exp_{\breve{q}}^{-1}$ による x', y' の inverse image を夫々

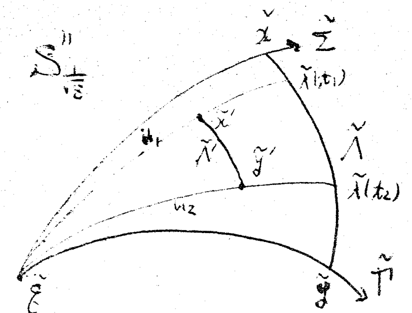


Fig 6

$\tilde{x}', \tilde{y}'$ とすると、$\tilde{x}' = \tilde{\varphi}_{t_1}(u_1)$, $\tilde{y}' = \tilde{\varphi}_{t_2}(u_2)$ となる $t_1, t_2 \in [0, a]$ と $u_1 \in [0, b_{t_1}]$, $u_2 \in [0, b_{t_2}]$ が一意的に定まる。$\tilde{x}', \tilde{y}'$ を最短測地線分 $\tilde{\lambda}'$ で結んだとき、$\lambda' = f \circ \tilde{\lambda}'$ と $\tilde{\lambda}'$ とに対して再び Rauch の定理が適用できて $L(\tilde{\lambda}') = L(\lambda') = d(\tilde{x}', \tilde{y}')$。$\lambda'$ が測地線分でないと仮定すると $d(x', y') < d(\tilde{x}', \tilde{y}')$ ゆえ、三辺形 (x', q, y') に対応する $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ 上の三辺形 $(\tilde{\tilde{x}}', \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{y}}')$ に於て $\measuredangle(\tilde{\tilde{x}}', \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{y}}') < \measuredangle(\tilde{x}', \tilde{q}, \tilde{y}') = \measuredangle(\tilde{\lambda}(t_1), \tilde{q}, \tilde{\lambda}(t_2))$ である。これは定理3に反する。故にこの曲面片は全測地的である。

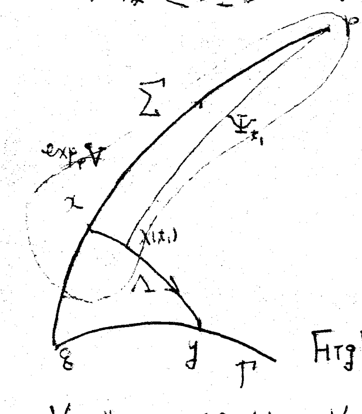


Fig 7

次に3点 p, x, y を頂点とする測地三辺形にこの全測地的定曲率曲面片が拡張されることを示そう。Σ の部分弧 $\widehat{px}$ は一意に決まる最短測地線分だから $\exp_x X = p$ とおくと X の近傍（M_x 内の）V で、$\exp_x V$ と V とが1対1に対応するものが存在する。$\measuredangle(p, x, y) = \measuredangle(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$（補角が等しかったから）ゆえ、$\exp_x(V)$ に含まれる Λ 上の点 $\lambda(t)$ をとり、$S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ 上の大円 $\tilde{\Phi}_t \in G(\tilde{p}, \tilde{\lambda}(t))$ と $f_t \circ \tilde{\Phi}_t = \Phi_t$ に対して再び Rauch の定理を用いて Φ_t が最短測地線分になる。上述の議論から $t_1 \in (0, a]$ で測地三辺形 $(\Sigma_1, \Lambda|[0, t_1], \Phi_{t_1})$ を境界にもつ定曲率 ε の全測地的曲面片が

得られる。但し Σ_1 は Σ の $\bar{p}x$ 間の部分弧である。さて始めに作った (x, z, y) を頂点にもつ曲面片とこの曲面片とは $\Lambda|[0, t_1]$ 上で同一の接平面を共有するから両者は同一の曲面上にある。かくして、$t_1 < t_2 < \cdots t_k < \cdots$ なる数列で $(p, \lambda(t_i), \lambda(t_{i+1}))$ を頂点にもつ三辺形 $(\Phi_{t_i}, \Lambda|[t_i, t_{i+1}], \Phi_{i+1})$ を境界にもつ定曲率 δ の全測地的曲面片で、全て同一の曲面に含まれるものが得られた。このとき $\sup t_i = a$ を主張する。実さい、$\lim_k t_{i_k} = a' < a$ と仮定すると、$\{\Phi_{t_{i_k}}\}$ より収束する部分列がとれて、その極限測地線分を Φ_0 とおくと明らかに $\measuredangle(p, \lambda(a'), y) = \measuredangle(\tilde{p}, \tilde{\lambda}(a'), \tilde{y})$ ゆえ $\Lambda|[a', a]$ と Φ_0 とで始めの議論をくり返すことができる。よって $a' = a$ でなければならぬ。三辺形 $(\Phi_a, \Gamma_1, \Theta)$ についても $\measuredangle(p, y, r) = \measuredangle(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{r})$ ゆえこの曲面片は Σ, Γ を境界にもつ曲面片にまで拡げられる。

注意1. この全測地的曲面片の第三の境界は必ずしも Θ に一致しない。しかしそれが最短測地線分であることは明らかである。

補題4.2 (Shiohama [17])
完備、連結な M が $(*)$ をみたすとき、もし $d(M) > \pi/2$ ならば M は単連結である。

証明、M が単連結でないと仮定する。$\tilde{M}$ を M の universal covering manifold とし π を projection map とする。$d(M) = d(p, q)$

なる二点 p, q に対して $\hat{q}, \hat{p}_1, \hat{p}_2 \in \hat{M}$ で $\pi(\hat{p}_1)=\pi(\hat{p}_2)=p$, $\pi(\hat{q})=q$ かつ $\hat{p}_1\neq\hat{p}_2$ が存在する。$\hat{\Theta}\in G(\hat{p}_1,\hat{p}_2)$ に対して $\Theta=\pi\circ\hat{\Theta}$ は p に於る閉測地線分である。このとき $\Gamma\in G(p,q)$ で、$\measuredangle(\gamma'(0),\theta'(0))\leq\pi/2$ なる Γ が存在する。この Γ に対して、$\hat{\Gamma}\in G(\hat{p}_1,\hat{q})$ かつ $\pi\circ\hat{\Gamma}=\Gamma$ なる $\hat{\Gamma}$ が $\hat{M}$ に存在する。$\hat{\Phi}\in G(\hat{q},\hat{p}_2)$ に対して $\Phi=\pi\circ\hat{\Phi}$ は q, p を結ぶ測地線分ゆえ $L(\Phi)\geq L(\Gamma)=d(p,q)>\pi/2\sqrt{\delta}$ が成立する。三辺形 $(\hat{\Theta},\hat{\Gamma},\hat{\Phi})$ に対応する $S^2_{1/\sqrt{\delta}}$ の等辺な三辺形に於て余弦法則より $\measuredangle(\tilde{p}_2\tilde{p}_1\tilde{q})\leq$ $\leq\measuredangle(\hat{p}_2\hat{p}_1\hat{q})\leq\pi/2$ だからもしも $(\hat{\Theta},\hat{\Gamma},\hat{\Phi})$ の周長が $2\pi/\sqrt{\delta}$ 未満ならば $\cos\measuredangle(\tilde{p}_2\tilde{p}_1\tilde{q})=$ $=\{\cos L(\Phi)\sqrt{\delta}-\cos L(\Theta)\sqrt{\delta}\cdot\cos L(\Gamma)\sqrt{\delta}\}/\sin L(\Theta)\sqrt{\delta}\cdot\sin L(\Gamma)\sqrt{\delta}\leq$

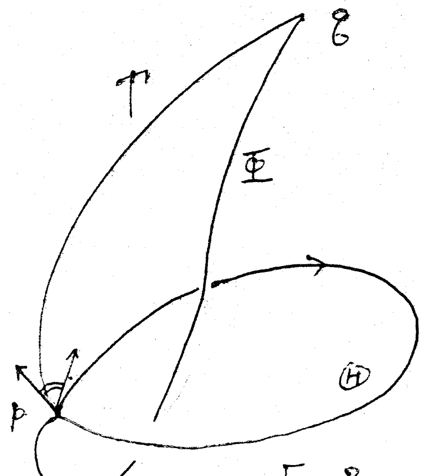


Fig 8

$\leq\cos d(M)\sqrt{\delta}\,(1-\cos L(\Theta)\sqrt{\delta})/\sin L(\Theta)\sqrt{\delta}\cdot\sin d(M)\sqrt{\delta}<0$ 。これより $\measuredangle(\tilde{p}_2\tilde{p}_1\tilde{q})>\pi/2$ となり従って $(\hat{\Theta},\hat{\Gamma},\hat{\Phi})$ の周長が $2\pi/\sqrt{\delta}$ でなければならぬ。定理4より $\hat{M}$ は $S^n_{1/\sqrt{\delta}}$ に等長であり、又 $\measuredangle(\hat{p}_2\hat{p}_1\hat{q})\leq\pi/2$ より $(\hat{\Theta},\hat{\Gamma},\hat{\Phi})$ は lune でなければならない。従って $L(\Theta)=\pi/\sqrt{\delta}$ 又は $L(\Gamma)=d(M)=\pi/\sqrt{\delta}$ 。後者の場合 M が $S^n_{1/\sqrt{\delta}}$ に等長ゆえ結論は自明である。$L(\Theta)=\pi/\sqrt{\delta}$ のときは、$L(\Gamma)+L(\Phi)\geq 2L(\Gamma)$ より $d(M)\leq\pi/2\sqrt{\delta}$ となり矛盾である。

命題4.8 (Shiohama[15])

Mは $0<\delta\le K_M\le 1$ をみたし，$d(x,y)>\pi/2\sqrt{\delta}$ なる $x,y\in M$ が存在するならば $d(x,C(x))\ge\pi$, $d(y,C(y))\ge\pi$ が成立する。

証明. $\delta>1/4$ のときは補題4.10によりMは単連結になるので定理7により明らかである。従って $\delta\le 1/4$ の場合のみ考える。$d(y,C(y))=\rho<\pi$ と仮定して矛盾を導びこう。仮定より y に於る閉測地線分 $\Sigma=\{\sigma(t)\}(0\le t\le 2\rho)$，$\sigma(0)=\sigma(2\rho)=y$ が存在して，$x\notin\Sigma$ である。従って $d(x,\Sigma)=d(x,z)$ なる $z\in\Sigma$ が存在する。$y\ne z$ と仮定すれば第一変分の簡単な計算により $d(x,z)\le\pi/2\sqrt{\delta}$ となる。Σ' を Σ の y,z により分けられた部分弧のうち長くない方とし，$\Phi\in G(x,y)$，$\Lambda\in G(x,z)$ とする。

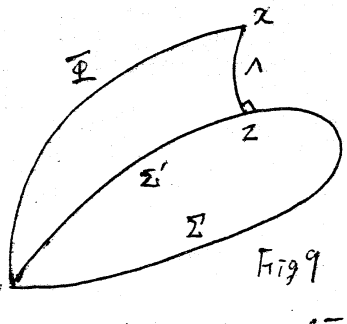


Fig 9

(x,y,z) を三頂点とする測地三辺形 (Σ',Λ,Φ) に対応する $S^2_{1/\sqrt{\delta}}$ 上の等辺の三辺形 $(\tilde\Sigma',\tilde\Lambda,\tilde\Phi)$ に於て $d(\tilde x,\tilde y)=L(\tilde\Phi)>\pi/2\sqrt{\delta}$ より $\measuredangle(\tilde y\tilde z,\tilde x)>\pi/2$ となり定理5に反する。従って $y=z$ でなければならぬ。

このとき $d(x,\sigma(t))>d(x,y)$ が任意の $t\in(0,2\rho)$ に対して成立している。従って特に $d(x,\sigma(\rho))>d(x,y)$ である。$y_1=\sigma(\rho)$，$\rho_1=d(y_1,C(y_1))$ とおくと $\rho_1\le\rho\le\pi$，$d(x,y_1)>d(x,y)>\pi/2\sqrt{\delta}$。従って閉測地線分 $\Sigma_1=\{\sigma_1(t)\}(0\le t\le 2\rho_1)$ $\sigma_1(0)=\sigma_1(2\rho_1)=y_1$ が存在する。もしも Σ_1 が閉測地線ならば上述の議論より直ちに

矛盾を生ずる。従って Σ_1 は閉測地線分である場合のみ考える。又、$d(x,y_1) < d(x,\sigma_1(t))$ が任意の $t \in (0, 2\rho_1)$ に対して成立するので特に $d(x,\sigma_1(\rho_1)) > d(x,y_1)$。$y_2 = \sigma_1(\rho_1)$, $\rho_2 = d(y_2, C(y_2))$ とおけば $\rho_2 \leqq \rho_1 \leqq \rho < \pi$, $d(x,y_2) > d(x,y_1) > d(x,y) > \pi/2\sqrt{\varepsilon}$ で、再び y_2 に於る閉測地線分 Σ_2 を得る。この方法を繰り返して

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots \qquad 但し\ y_0 \equiv y$$

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_k, \cdots \qquad 但し\ \Sigma_0 \equiv \Sigma$$

$$\pi > \rho_0 \geqq \rho_1 \geqq \rho_2 \geqq \cdots \geqq \rho_k \geqq \cdots \qquad 但し\ \rho_0 \equiv \rho$$

$$\pi/2\sqrt{\varepsilon} < d(x,y_1) < d(x,y_2) < \cdots < d(x,y_k) < \cdots$$

を得る。M はコンパクト故 $\{d(x,y_k)\}$ は有界である。従って極限 L をもつ。又 $\{y_k\}$ から y^* に収束する部分列が選べる。$p \to d(p, C(p))$ は M 上で下に半連続な関数であるから

$$\lim \rho_i \geqq \rho^* \equiv d(y^*, C(y^*))$$

が成立する。

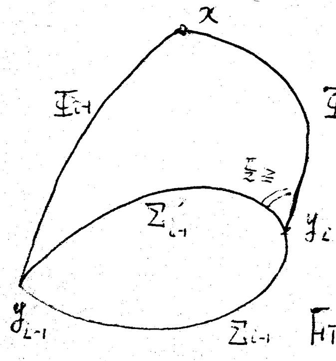


Fig 10

一方 $\Phi_i \in G(x, y_i)$ に対して Σ_{i-1} の部分弧 Σ'_{i-1} で、y_i に於る Σ'_{i-1} と Φ_i との交角が $\pi/2$ 以下のものがとれる。三辺形 $(\Phi_{i-1}, \Sigma'_{i-1}, \Phi_i)$ に対応する $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ 上の等辺な三辺形 $(\tilde{\Phi}_{i-1}, \tilde{\Sigma}'_{i-1}, \tilde{\Phi}_i)$ に於て $\tilde{y}_i$ に於る頂角 $\tilde{\alpha}_i$ は Σ'_{i-1} のとり方により $\pi/2$ 以下である。従って球面三角法により

$$\cos d(x, y_{i-1})\sqrt{\delta} - \cos d(x, y_i)\sqrt{\delta}\cdot\cos \rho_{i-1}\sqrt{\delta} = \sin d(x, y_i)\sqrt{\delta}\cdot\sin \rho_{i-1}\sqrt{\delta}\cos\tilde{\alpha}_i$$

$\geqq 0$ が $i=1, 2, \cdots$ に対して成立する。従って

$$\cos d(x, y_{i-1})\sqrt{\delta} \geqq \cos d(x, y_i)\sqrt{\delta}\cdot\cos \rho_{i-1}\sqrt{\delta}$$

が $i=1, 2, \cdots$ に対して成立する。よって

$$\cos d(x, y)\sqrt{\delta} \geqq \cos d(x, y_1)\sqrt{\delta}\cdot\cos \rho_0\sqrt{\delta} \geqq \cos d(x, y_2)\sqrt{\delta}\cdot\cos\rho_1\sqrt{\delta}\cdot\cos\rho_0\sqrt{\delta}$$

$$\geqq \cos d(x, y_k)\sqrt{\delta}\prod_{i=1}^{k}\cos \rho_{i-1}\sqrt{\delta} \geqq \cos d(x, y_k)\cdot(\cos \rho^*\sqrt{\delta})^k \quad .$$

しかし $\lim_{k\to\infty} \cos d(x, y_k)\cdot(\cos \rho^*\sqrt{\delta})^k = 0$ ゆえ $\cos d(x, y_0)\sqrt{\delta} \geqq 0$ でなければならぬ。これは $d(x, y) \leqq \pi/2\sqrt{\delta}$ を意味するので矛盾である。

注意13. 命題4.11よりコンパクトリーマン多様体 M が $d(M) > \pi$ かつ $1/4 \leqq K_\alpha \leqq 1$ をみたすならば M は S^n に同相であることが証明できる(Shiohama[ ])。

さて、杉本の定理の証明が完全に準備された。

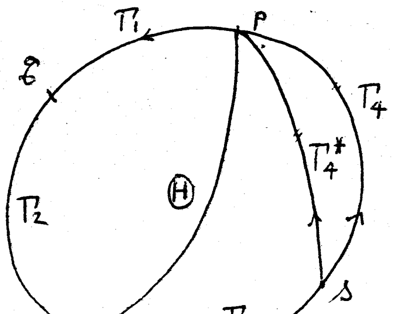


Fig 11

定理2.4の証明。T が T_1, T_2, T_3, T_4 に分割されていて頂点は p, q, r, s とする(Fig 11参照)。$\mathcal{L}(T_i) = a_i$ とおく。一般性を失うことなく $a_1 > \pi/2\sqrt{\delta}$ としてよい。$\Theta \in G(p, r)$ $\Theta = \{\theta(t)\}$ $(0 \leqq t \leqq \ell)$ とおいて $\ell < \pi/\sqrt{\delta}$ と仮定する。$(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{\Theta}), (\tilde{\Theta}, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4)$ を夫々 $(T_1, T_2, \Theta), (\Theta, T_3, T_4)$ に対応する等辺の $S^2_{\sqrt{\delta}}$ 上の三辺形で $\tilde{\Theta}$ を共有し一方を他の外側に描くものとする。このとき ℓ の

仮定より$(\tilde{\Gamma}_1\tilde{\Gamma}_2\tilde{\Gamma}_3\tilde{\Gamma}_4)$は$L_{(1/2)}$になるので測地三辺形$(\Gamma_3\Gamma_4\theta)$と$(\tilde{\Gamma}_3\tilde{\Gamma}_4\tilde{\theta})$とは$r, \tilde{r}$に於る頂角が等しい。命題4.1により$\Gamma_3, \theta, \Gamma_4^*$を境界にもつ定曲率$\delta$の全測地的曲面片が存在する。$a_1 = a_3$, $a_2 = a_4$となるから$a_4 = \pi/\sqrt{\delta} - a_1 < \pi/2\sqrt{\delta} \leqq \pi$。一方$d(p, c(p)) \geqq \pi$が$a_1 > \pi/2\sqrt{\delta}$ゆえ命題4.3により保証されているので従って$\Gamma_4^* = \Gamma_4$でなければならぬ。このときには、$\measuredangle(-\gamma_3'(a_3), \gamma_4^{*\prime}(0)) = \pi$ゆえ$\measuredangle(-\tilde{\gamma}_3'(a_3), \tilde{\gamma}_4'(0)) = \pi$でなければならぬ。これは$l < \pi/\sqrt{\delta}$に矛盾する。

定理2.5の証明。

$d(\Gamma_i) = \pi/2\sqrt{\delta}$なる等辺四辺形に$\Gamma$を分割する。$\theta \in G(p, r)$とし$L(\theta) = l < \pi/\sqrt{\delta}$と仮定して矛盾を導びく。$(\theta, \Gamma_3, \Gamma_4^*)$を境界にもつ曲率$\delta$の全測地的曲面片が存在する。$l < \pi/\sqrt{\delta}$の仮定から$\Gamma_4^* \neq \Gamma_4$従って$p, q$は$\Gamma_4, \Gamma_4^*$の最短測地線分で結ばれそれらの長さは$\pi/2\sqrt{\delta} \leqq \pi$である。従って$\delta = 1/4$でなければならぬ(これは定理6に基ずく議論である)。このときBergerのtechnique(補題4.4)によりΓ_4^*, Γ_4を境界にもつ定曲率1の全測地的曲面片が存在する。従って$K(\gamma_4^{*\prime}(0), \gamma_4'(0)) = 1$. 一方から$K(-\gamma_3'(\pi/2\sqrt{\delta}), \gamma_4^{*\prime}(0)) = \delta$でこれは矛盾である。

$\boxed{\text{IV}}$ 定理6, 7の証明。

Mが$\pi_1(M) = Z_2$かつ$1/4 < \delta \leqq K_\sigma \leqq 1$をみたすとき、$d(M) = l = d(r, t)$とおくと、単純閉測地線$\mathcal{L} = \{\sigma(t) \mid 0 \leqq t \leqq 2l\}$で、$\sigma(0) =$

$=\sigma(2l)=p$, $\sigma(l)=q$ となるものが存在する。実際、$\Sigma_1\in G(p,q)$ に対して $\Gamma\in G(p,q)$ で $\measuredangle(-\sigma_1'(0),\gamma'(0))\leqq\pi/2$ となる Γ が存在する(補題4.5)。ここで $\measuredangle(\sigma_1'(0),\gamma'(0))\neq\pi$ と仮定すると、$u=-(\sigma_1'(0)+\gamma'(0))$ に対して $\Sigma_2\in G(p,q)$ で $\measuredangle(u,\sigma_2'(0))\leqq\pi/2$ なる Σ_2 が存在する。M の universal covering space $\hat{M}$ 内の $\hat{p}_1$ $(\pi(\hat{p}_1)=p)$ から出る Σ_1,Γ,Σ_2 の lift を $\hat{\Sigma}_1,\hat{\Gamma},\hat{\Sigma}_2$ とおくとこれらのうち少くとも2つは同じ終点をもつ。一方から $l=d(M)\leqq\pi/2\sqrt{\delta}<\pi$ ゆえこれは定理7に反する。従って $\measuredangle(\sigma_1'(0),\gamma'(0))=\pi$ でなければならぬ。同様にして $\sigma_1'(l)$ と $\gamma'(l)$ との角 $\neq\pi$ となる。

さて $\hat{M}$ に長さ $2\pi/\sqrt{\delta}$ の閉測地線が存在すれば、$\hat{M}$ は $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$ に等長になるので定理6は自明である。又定理7も同じ理由により明らかである。

V 定理2.8の証明.

まずIVの途中で用いた2つの補題を証明する。

補題4.4 (Berger [2])

M はコンパクトで $0<\delta\leqq K_\sigma\leqq 1$ を満たすものとする。M の2点 p,q で $d(p,q)=\pi$ かつ、$\Theta_1,\Theta\in G(p,q)$ $\Theta\neq\Theta_1$ であって $\Theta_1'(0)\neq\pm\Theta'(0)$ なる2本の最短測地線分が存在するものとする。更に p の近傍 U で、U 内の任意の点 x に対して $d(x,c(x))\geqq\pi$ が成立するならば、Θ_1,Θ を境界にもつ定曲率1の全測

地的曲面片がMに存在する。

注意14. Bergerは偶数次元コンパクト単連結なMが $\delta \leqq K_\sigma \leqq 1$ をみたすときにこの補題を証明した[。]。ここではPの近傍だけでcut locusの距離評価ができていれば十分であることを云っている。又この補題は注意13に述べたことを証明する為には重要である。

証明.

$x=\Theta(t_0)\in U$ を任意に固定する。$\measuredangle(\Theta'(0),\Theta_1'(0))\neq\pi$ ゆえ、$\measuredangle(\Theta'(\pi),\Theta_1'(\pi))\neq\pi$ である。実さいもしも $\measuredangle(\Theta'(\pi),\Theta_1'(\pi))=\pi$ となったと仮定すると Θ,Θ_1 はPからでる長さ 2π の閉測地線分となる。これを Θ^* とおけば、

$$d(x,\Theta^*(\pi+t_0))<d(x,p)+d(p,\Theta^*(\pi+t_0))=t_0+(\pi-t_0)=\pi$$

故に $\Theta^*[t_0,\pi+t_0]$ は最短測地線分ではない。これは $d(x,C(x))\geqq\pi$ に矛盾する。(Fig 12参照)。このとき明らかに任意の $t\in[0,\pi]$ に対して $d(x,\Theta_1(t))<\pi$ が成り立つ。M_x 内の中心0,半径 π の開球を V とおくと $\exp_x|V$ は1-1であるから $(\exp_x|V)^{-1}\circ\Theta_1$ が一意に定まる。$\Lambda_t\in G(x,\Theta(t))$ とおく。S_1^n 上に一点 x^* を固定し Θ^* を x^* をとおる大円で、$\Theta^*(t_0)=x^*$ となるものとする。

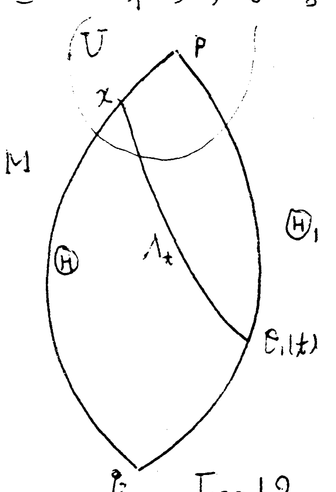


Fig 12

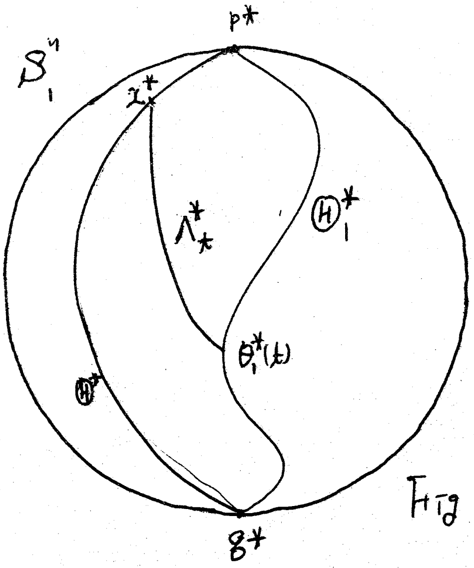


Fig 13

$p^* = \theta^*(0)$, $q^* = \theta^*(\pi)$ とおけば、Ranck の定理により
$\mathcal{L}(\exp_{x^*}\circ \iota_{x^*}\circ(\exp_x|V)^{-1}\circ \Theta_1) \leqq$
$\leqq \mathcal{L}(\Theta_1) = \pi$。従って
$\exp_{x^*}\circ\iota_{x^*}\circ(\exp_x|V)^{-1}\circ\Theta_1 \equiv \Theta_1^*$
は p^*, q^* を結ぶ大円である。
但し $\iota_x : M_x \longrightarrow (S_1^n)_{x^*}$ は
isometric isomorphism で
$\iota_x(\theta'(t_0)) = \theta^{*\prime}(t_0)$ により定義されたものとする。Θ_1^* が大円であることは $\lambda_t'(0)$ が $t\in[0,\pi]$ に対して同一の2次元部分空間に含まれることを意味し、$(t,u)\longrightarrow \varphi(t,u)\equiv \exp_x u\cdot\lambda_t'(0)$ は曲面片を定義する。ここに $u\in[0,b_t]$ で $b_t=\mathcal{L}(\Lambda_t)$。
更にこの曲面片に接する接平面の定める断面曲率が1であることも解る。さて、この曲面片上に任意の2点 y, z をとり $d(y,z)$ が M の基本弧長より小であるとしたとき、y, z を結ぶ最短測地線分がこの曲面に含まれることを証明すればよい。
$f \equiv \exp_{x^*}\circ\iota_*\circ(\exp_x|V)^{-1}$ とおく。y, z に対して $y=\lambda_{t_2}(s_2)$
$z = \lambda_{t_1}(s_1)$ となる s_1, t_1, s_2, t_2 が一意に定まる。$y^*=f(y)$
$z^*=f(z)$ とおく。y^*, z^* をとる大円弧（劣弧）を Ψ^* とおく。
$\Psi \in G(y,z)$ がこの曲面片上にないと仮定して矛盾を導びこう。Ranck の定理より $\mathcal{L}(\Psi)\geqq\mathcal{L}(f\circ\Psi)\geqq\mathcal{L}(\Psi^*) = d(y^*z^*)$,

一方 $\mathcal{L}(f^{-1}\circ\Phi^*)=\mathcal{L}(\Phi^*)\geqq\mathcal{L}(\Phi)$ 。従って $\mathcal{L}(\Phi)=\mathcal{L}(f^{-1}\circ\Phi^*)$ から $f^{-1}\circ\Phi^*$ が最短測地線分となり、Φ に一致しなければならない。ところが $f^{-1}\circ\Phi^*$ はこの曲面片上にあるので Φ もこの曲面上になければならぬ。

補題 4.5 (Tsukamoto[ ])

M はコンパクトなリーマン多様体で $d(M)=d(p,q)$ とする。任意の $X\in M_p$ に対して $\gamma\in G(p,q)$ で、$\langle X,\gamma'(0)\rangle\geqq 0$ となる γ が存在する。

注意15、Berger は正曲率なる仮定の下にこの補題を証明した(Berger[2])。しかし曲率の仮定は基本的な仮定でなく、コンパクト性のみが基本的であることが塚本により示された。

証明. $\|X\|=1$ としてよい。$\Sigma=\{\sigma(t)\}(0\leqq t\leqq l)$ は、$\sigma(t)=\exp_p tX$ で定義された測地線分とする。$t_1>t_2>\cdots>t_n>\cdots$ $\lim t_n=0$ なる減少数列と $\lambda_n\in G(\lambda(t_n),q)$ なる測地線分の系列で、$\langle\sigma_n'(t_n),\lambda_n'(0)\rangle\geqq 0$ なるものが存在する。実さいにかような $\{t_n\}$ と $\{\lambda_n\}$ とが存在しなかったと仮定すれば $d(M)$ より長さが長い最短測地線分が M に存在することになり、矛盾を生ずる。この λ_n から収束する部分列を選べば証明は完結する。

さて、Berger の論旨に従って定理8を証明する準備をする。

$d(M)=\pi$，かつ定理6よりMの任意の点でMのdiameterが測れる。さて、$p,q\in M$を$d(p,q)=\pi$となるよう任意に固定し
$A_{p,q}\equiv\{X\in M_q\mid \|X\|=1,\ \exp_q \pi X=p\}\subset M_q$なる$M_q$の部分集合を考える。$S_q$を$M_q$内の中心0，半径1の超球としたとき、$A_{p,q}$が$S_q$と$M_q$のある部分空間との交わりになることを証明すれば十分である。

$A_{p,q}$はS_qの部分集合で次の性質をもつことが解る。

(1) $A_{p,q}$の任意のX,Yに対して、$(aX+bY)/\sqrt{a^2+b^2}\in A_{p,q}$が任意の$a\geqq 0,\ b\geqq 0$に対して成立する。

(2) M_qの任意のZに対して，$X\in A_{p,q}$で$\langle X,Z\rangle\geqq 0$となる$X$が存在する。

(3) $A_{p,q}$はS_q内の閉集合である。

(1)は補題4.4による。(2)は補題4.5から。(3)は$A_{p,q}$の定義から夫々明らかである。$A_{p,q}\neq\phi$なることは明らかであるが、$A_{p,q}$はS_q内の凸集合であるか，もしくは$A_{p,q}$が2点$\{X,-X\}$のみから成るかのいずれかである。さて、ある pair p,q $d(p,q)=\pi$に対して$A_{p,q}$が2点のみから成ると仮定しよう。このとき$d(p,C(p))\geqq\pi$に注目して、pから出る測地線は全て単純閉測地線であり，2πのびすとpに戻る。任意の$\gamma=\{\gamma(t)\}\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ $\gamma(0)=\gamma(2\pi)=p$に対して、0の(pの) γに沿うfirst conjugate pointは2π（p自身）である。

p は、初瀬－高木の意味での self-conjugate point である。このとき Hatsuse-Takagi の定理[13]により M は単連結でなく、PR^n と M が微分同型となることが解り、M の仮定に反する。従って任意の pair p, q $d(p,q)=\pi$ に対して $A_{p,q}$ $=\{X, -X\}$ となることは起こらない。以下この p, q を固定しておく。

補題 4.6. (Berger[3])

$A_{p,q}$ の元 X_0 で、$-X_0 \in A_{p,q}$ なるものが存在する。

証明。

もしも任意の $X \in A_{p,q}$ に対して、$-X \notin A_{p,q}$ と仮定すれば、$A_{p,q}$ が S_q 内の凸集合であるから、南半球に完全に含まれるような北極 $Z_0 \in S_q$ が存在する。この Z_0 に対して(2)を用いて、$\langle X, Z_0\rangle \geqq 0$ なる $X \in A_{p,q}$ が存在する。これは矛盾である。

以下この X_0 を固定する。M_q' を M_q 内の X_0 に垂直な $n-1$ 次元部分空間とする。云うまでもなく $\Gamma=\{\gamma(t)\}(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ $\gamma(0)=q$, $\gamma(t)=\exp_q tX_0$ は閉測地線である。$U' \equiv A_{p,q} \cap M_q'$ とおいたとき、U' が S_q の部分空間になることを証明すれば十分である。

補題 4.7 (Berger[3] Lemma 1)

$\underline{P}$ は U' を含む M_q の最小の部分空間とする。$\underline{P}$ の任意の X,

$\|X\|=1$ に対して、$\varepsilon>0$, $\eta>0$ で以下の条件を満たすものが存在する。任意の $Y\in S_q$ で $\langle X, Y\rangle \geqq 1-\eta$ なる Y に対して、$d(p, \exp_q tY) < d(p,q)=\pi$ が $t\in(0,\varepsilon)$ なる任意の t に対して成立する。

証明、変分原理にもとずき、$\langle Y, X_0\rangle=0$ なる場合のみ考えれば十分である。任意の $Z_0\in U'$ に対して、γ が赤道になっている、Z_0 が q に於ける接ベクトルになっている2次元の半球が M に存在する。これは補題5.4と γ が閉測地線であることによる。従って M_q 上の二次形式 $V\to\langle R(VX_0)X_0, V\rangle$ を考えると、$K_0\equiv1$ ゆえ U' はこの二次形式の固有値1の固有空間に含まれる。特に Z を γ に沿う平行ベクトル場で、$Z(0)=Z_0$ をみたすものとすれば、Z は半球の平行ベクトル場ゆえ $Z(2\pi)=Z(0)=Z_0$ で特に、$K(Z(t),\gamma'(t))=1$ をみたす。
さて、$W_0\in P$ を任意にとれば、W_0 は U' の元 Y_0, Z_0 を用いて、$W_0=\alpha Y_0+\beta Z_0$ と書けるので W_0 も $V\to R(VX_0)X_0$ の固有値1の固有空間に属する。従って W を γ に沿う M の平行ベクトル場で、$W(0)=W_0$ なるものとすれば、明らかに $K(W(t),\gamma'(t))=1$ が成立している。しかし W に対しては、γ を赤道にもち、$W(t)$ が接ベクトルになっているような2次元半球が M に存在するかどうか解らない。

さて、$C=\{Y\in M_q \mid \|Y\|=1, \langle YX_0\rangle=0, \langle YX\rangle\geqq 1-\eta\}$

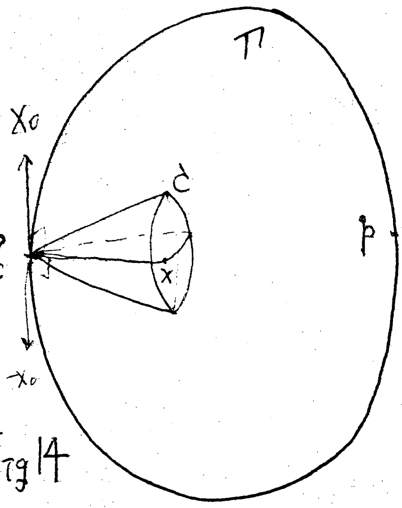


Fig 14

とおく (Fig 14 参照)。
$Y(t)$ を γ に沿う平行ベクトル場で $Y(0)=Y$ なるものとする。
任意の $\xi>0$ に対して $\eta(\xi)>0$ で、$\langle X Y\rangle \geqq 1-\eta(\xi)$ なる任意の Y が $K(Y(t), \dot{\gamma}(t)) \geqq 1-\xi$ をみたすような $\eta(\xi)$ が存在する。
$\gamma|[0,\pi]$ に沿うベクトル場 $\sin kt\, Y(t)$ を変分ベクトル場に持つ変分 $V(t,\varepsilon)=\exp_{\gamma(t)} \varepsilon\cdot \sin kt \cdot Y(t)$ に於て第二変分 $L''(0)$ は $L''(0) \leqq (k^2-(1-\xi))\pi/2 + k/4\cdot(1-\xi+k^2)\sin 2k\pi$ となる。ここで $3/4<k<1$, $\xi=1-k^2$ とおけば、この ξ に対して $\eta(\xi)>0$ が存在し、$\langle Y X\rangle \geqq 1-\eta(\xi)$ をみたす Y から作った上記のベクトル場を変分ベクトル場にもつ第二変分は $L''(0)<0$ となる。

補題 4.8 (Berger [3], Lemma 2)
$\underline{P}$ の任意の元 X に対して、$Z'\in U'$ で $\langle X, Z'\rangle>0$ なるものが存在する。

証明。 $X\in \underline{P}$ に対して $Z\in A_{p,q}$ で $\langle X, Z\rangle>0$ となる Z が存在することを示せば十分である。実さいに、$Z'=(Z-\langle X_0 Z\rangle X_0)/\|Z-\langle X_0, Z\rangle X_0\|$ とおけば $Z'\in U'$ かつ、$\langle Z' X\rangle \geqq \langle Z X\rangle > 0$ である。

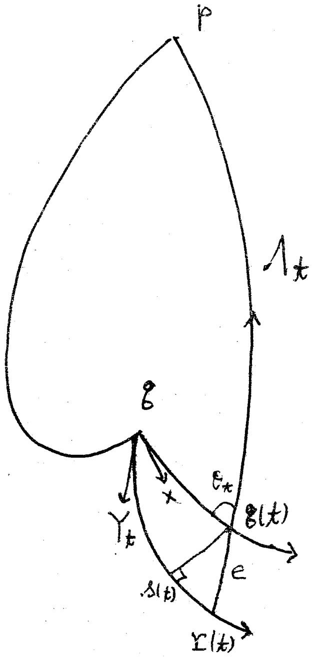


Fig15

さて、$q(t)=\exp_q tX$,
$d(t)=d(p,q(t))$, $e(t)=\pi-d(t)$
$\Lambda_t\in G(q(t),p)$ $\theta_t=\measuredangle(\lambda_t'(0),-q'(t))$
とおく（Fig 15 参照）。補題4.7より $d(t)<\pi$。
定理5を用いて、$\alpha(t)=\cos\theta_t$ として、
$\pi^2\leqq d^2+t^2-2dt\cos\theta_t$
$=d^2+t^2-2d\cdot t\cdot\alpha(t)$。
$r(t)=\lambda_t(-e(t))$ とおく。

$t\to0$ のとき $d(q,r(t))\to0$ ゆえ $\varepsilon>0$ に対して $\varepsilon'>0$ が存在して、$d(q,r(t))<\varepsilon$ が任意の $t\in(0,\varepsilon')$ に対して成立する。Y_t を q, $r(t)$ を結ぶ一意に決まる最短測地線分の q に於る接ベクトル(単位)とするとき、もしもある $t\in(0,\varepsilon)$ に対して、$\langle Y_t,X\rangle\geqq1-\eta$ が成立するならば補題4.7により $d(p,r(t))<\pi$ となり矛盾である。さて $s(t)$ を $q(t)$ より $\overline{q\,r(t)}$ に下した垂線の足とするとき、$d(q(t),r(t))\geqq d(q(t),s(t))$。更に
$d(q(t),s(t))/d(q,q(t))=e(t)/t\geqq\sin\beta(t)$ が $t\to0$ に対して成立する。但し $\beta=\measuredangle(X,Y_t)$ とおいた。一方から
$\sin\beta(t)\geqq\{1-(1-\eta)^2\}^{\frac{1}{2}}>0$ ゆえ $e(t)/t\geqq a>0$ なる正数 a が存在する（$t\to0$ のとき）。故に
$\alpha(t)\geqq\pi e/dt-(e^2+t^2)/2dt\geqq(\pi/d)\cdot a-(ae+t)/2d\to a$。

故に $\varepsilon''>0$ が存在して、$\lambda(t) \geqq b > 0$ が任意の $t\in(0,\varepsilon'')$ に対して成立する。ここで Λ_t から収束する部分列を選び、その極限測地線を Λ とおくとき、$Z \equiv \lambda'(0)$ とおけば $\langle Z, X\rangle \geqq b > 0$ である。

定理の証明。

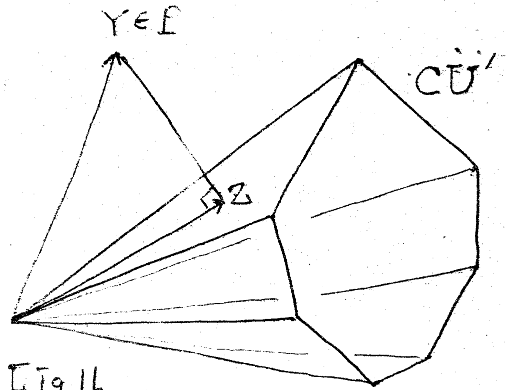


Fig 16

$CU' \equiv \{kX \mid X\in U',\ k\geqq 0\}$ とおくとき、$P = CU'$ を証明したい。$CU' \subset P$ は自明である。もしも $Y\in P - CU'$ が存在したとして(Fig16) 矛盾を導びこう。

$Z\in CU'$ で $d(Y,Z) = d(Y,CU')$ なる Z が一意に存在する。CU' は convex ゆえ Z が一意に決まる。又 $Y-Z\in P$ かつ、$\langle Y-Z, W\rangle \leqq 0$ が CU' の全ての元 W に対して成立する。しかし補題4.8より $W_0\in U$ で、$\langle W_0, Y-Z\rangle > 0$ なるものが存在する。これは矛盾である。

§5. 定理3.1 —— 定理3.5の証明。

§3に述べた定理を全て完全に証明する。定理3.1、3.2は Klingenberg の論文[C]の内容の紹介であり、定理3.3は、研究集会に於て紹介した方法による。定理3.5については $\mathbb{Z}_3$ の場合のみ証明すれば、一般の $\mathbb{Z}_n$ の場合にも同様の議論で証明できる。

I. 定理3.1の証明。

$s(p) = d(p, C(p))$ の最小値 s_0 が、$s_0 < \pi$ であったと仮定する。M の任意の閉測地線分の長さは $2s_0$ 以上であることが解る。実さい cut locus までの距離の最小値は次の2数のうちの小なる方で与えられるからである。

(1) 測地線分上の first conjugate point までの長さの最小値

(2) 閉測地線の長さの最小値の半分。

$s_0 < \pi$ なる仮定に基ずき、長さ $2s_0$ の閉測地線 γ が存在する。このとき Synge の Lemma により γ の平行曲線族で長さが γ より短かいものがとれる。これより γ 上の一点 p から出る測地線分で長さ s_0 のものが p の γ 上の対点に到達し従って $\gamma(0)$ の対点 $\gamma(s_0)$ は、γ に沿う conjugate pair である。一方曲率の仮定 $K \leqq 1$ より γ に沿う $\gamma(0)$ の conjugate point は π 以上(長さが)の所に分布しているので $s_0 < \pi$ に矛盾する。

次に後半を証明する。長さ 2π の閉測地線分は、前半

の結果から単純閉測地線になり、XをΓに垂直な単位平行ベクトル場としたとき、Γの平行曲線$\Gamma_\varepsilon=\{\gamma_\varepsilon(t)\}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$, $\gamma_\varepsilon(t)\equiv \exp_{\gamma(t)}\varepsilon X(t)$ は$K>0$なる仮定から長さはΓより短かいので、その出発点$\gamma_\varepsilon(0)$に於ける接空間内に$\exp_{\gamma_\varepsilon(0)}$を通して unique に lift される。従って写像φ, $\varphi(t)\equiv\measuredangle(\gamma_\varepsilon'(0),\sigma_t'(0))$ $\Sigma_t\in G(\gamma_\varepsilon(0),\gamma_\varepsilon(t))$ の値域は$[0,\pi]$ ゆえ任意の$\alpha\in(0,\pi)$に対して$\Sigma_{t_\alpha}\in G(\gamma_\varepsilon(0),\gamma_\varepsilon(t_\alpha))$で$\varphi(t_\alpha)=\alpha$となる$t_\alpha$, Σ_{t_α}が存在する。但しt_αは, $\varphi(t)=\alpha$となる閉集合内で最小のtの値として決めることにする。$\varepsilon\to 0$としたときΣ_{t_α}は$\gamma(0)$と$\gamma(\pi)$とを結ぶ長さπの最短測地線分になる。従って$\gamma(0)$から出る長さπの測地線分は$\gamma(\pi)$をその端点にもつ。長さπの測地線分の両端が conjugate pair のとき、その測地線分上では Gauss 曲率が恒等的に1になるので証明は終る。

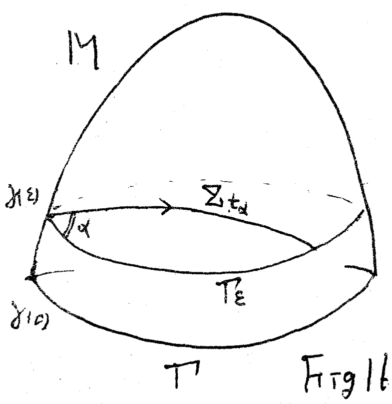


Fig 16

Ⅱ. 定理3.2の証明。

前半は明らかである。Morse-Schoenberg の定理から conjugate points 間の長さはπ以上であり、閉測地線の長さの半分もπ以上なることが既に示されたから。従って後半のみ証明する。

任意の点 q に対して、$d(p,q) \leq \pi$ としたとき $C(p)$ が一点のみからなることを示せば十分である。今、p から出る長さ π の測地線分の端点が p の conjugate point ならば、その測地線分を conjugate segment、端点が p の conjugate point でないならば non-conjugate segment と呼ぶことにする。M_p に於る conjugate segment の単位接ベクトルを conjugate 方向、non-conjugate segment の単位接ベクトルを non-conjugate 方向と呼ぶことにする。明らかに conjugate 方向は単位円周 R 上の閉部分集合をなす。我々の仮定の下に次の3つの場合が考えられる。

(A) p から出る長さ π の測地線分が全て conjugate segment のとき。

(B) non-conjugate segment T に対して、T と異なる non-conjugate segment τ で $\tau(\pi) = \sigma(\pi)$ となる τ が存在する。

(C) A でも B でもない。

さて、(A), (B) の場合に M が S_1^2 に等長になることはすでに述べた。以下 (C) のみを考える。条件より non-conjugate segment T が存在し、p と $\tau(\pi)$ とを結ぶ T 以外の最短測地線分は全て conjugate segment である。単位円周 R に向きを定めておく。conjugate 方向の set A は R の閉部分集合で、特に p と $\tau(\pi)$ とを結ぶ conjugate segment の方向は R の閉部分集合で

ある。従ってRの向きが4に従って$\gamma'(0)$に最も近い（R上の距離で）$G(P, \gamma(\pi))$内のconjugate方向が定まる。それを$\alpha'(0)$とする。Γ, ΣはMを2つの連結成分に分け、Rの部分弧$[\gamma'(0), \alpha'(0)]$内に方向をもつ測地線分族によりその一つの連結成分は完全におおわれる。それをNと呼び、$I \equiv [\gamma'(0), \alpha'(0)]$とおく。I内の$\gamma'(0)$の近くにnon-conjugate方向$\gamma_1'(0)$がとれ、$\Gamma_1$と終点を共有するconjugate segment Σ_1が上述のとり方に従ってN内にとれる。実さい$\alpha_1'(0) \notin I$と仮定すれば、$\gamma_1(\pi)$はNの内点である（Cの条件から）からΣ_1はΓ又はΣとp以外の共有点をもつ。これは矛盾を生ずるから。このとき区間$[\alpha_1'(0), \alpha'(0)]$内には少なくとも一つのconjugate方向が存在する。実さい、$[\alpha_1'(0), \alpha'(0)] \subset A$と仮定すれば$\alpha(\pi) = \gamma_1(\pi)$となり(B)に帰着するから。$\Gamma_1, \Sigma_1$で囲まれる一つの連結成分のうちで、$[\gamma_1'(0), \alpha_1'(0)]$内に方向をもつ測地線分族によりおおわれるものを$N_1$と呼ぶことにすると、明らかに$N_1 \subset N$である。

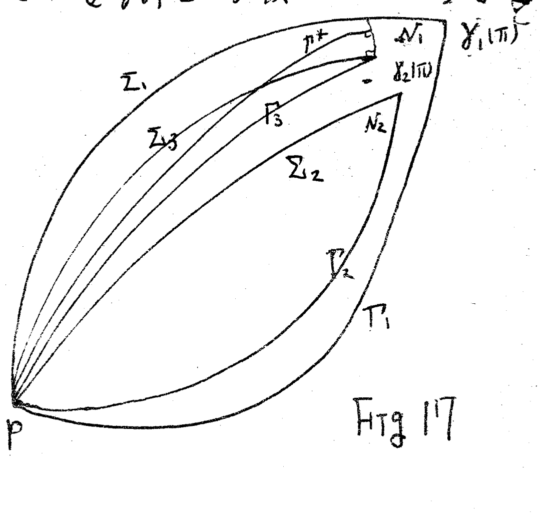


Fig 17

R−A内の$\gamma'(0)$を含む連結成分に含まれる区間$[\gamma'(0), p)$を考える。このとき$\gamma_1'(0) \in [\gamma'(0), p)$に対して$\alpha_1'(0) \in A$を対応させる写像fは単調減少で有界である

から、任意の $\varepsilon>0$ に対して $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \in [\gamma'(0), P)$ で、$\sigma_i'(0) =$
$= f(\gamma_i'(0)) \in A$ とおくと $[\sigma_2'(0), \sigma_1'(0)] < \varepsilon$ となる $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)$
がとれる。$[\sigma_2'(0), \sigma_1'(0)]$ 内には少くとも一つ non-conjugate な
方向 $\gamma_3'(0) \in [\sigma_2'(0), \sigma_1'(0)]$ に対して $\sigma_3(0) = f(\gamma_3'(0)) \in A$ が全く
同じとり方により定まる。$\sigma_3'(0) \in A$ ゆえ $\sigma_3'(0) \in [\sigma_2'(0), \sigma_1'(0)]$。
明らかに $[\gamma_3'(0), \sigma_3'(0)] < [\sigma_2'(0), \sigma_1'(0)] < \varepsilon$ であるから、従って
$\varepsilon>0$ を十分小さくとり、$\measuredangle(\gamma_3'(\pi), \sigma_3'(\pi)) < \pi/4$ とすること
が可能である。ここで Γ_3 に十分近い N_3 内の $\Gamma_* = \{\gamma_*(t)\}$ (
$0 \leqq t \leqq \pi$) をとると $\gamma_*(\pi) \notin N_3$ となり矛盾する。

注意16. 上の証明で $\measuredangle(\gamma_3'(\pi), \sigma_3'(\pi)) < \pi/4$ のときの $\pi/4$
には特別な意味はない。ただ $\measuredangle(\gamma_3'(\pi), \sigma_3'(\pi)) < \pi/2$ であれば十
分である。

III. 定理3.3 の証明.

$d(M) = \pi$ となることを示せば十分である。$\Gamma = \{\gamma(t)\}(0 \leqq t$
$\leqq 2\pi)$ を長さ 2π の閉測地線とする。$p = \gamma(0)$ とおく。
Γ 上にない M の任意の点 q に対して、$d(q, \Gamma) = d(q, r)$ なる r
を Γ 上にとり、(p, q, r) を頂点にもつ測地三辺形に定理5を
適用すれば、$d(p, q) \leqq \pi$ を得る。従って(偶数次元だから)
$C(p)$ の任意の点 x に対して $d(p, x) = \pi$ となる。

さて $C(p) = \{q\}$ と仮定する。このとき Index form の比
較定理から任意の $\Lambda \in G(p, q)$ に対して q は Λ に沿う p の

first conjugate point で conjugate point の multiplicity は $n-1$ である。故に Λ に接する任意の plane element σ に対して $K_\sigma = 1$ が成立し，更に Rauch の定理を用いて S_1^n と M との間に exponential map を介して等長写像が得られる。

従って以下では $C(p)$ が一点のみでない場合のみを考える。$d(M)=\pi$ を証明する為に、p から出る測地線は全て長さ 2π の単純閉測地線となることを示せば十分である。実さい p から出る測地線が全て長さ 2π の閉測地線であったとする。$d(M)=d(p_0, q_0)$ なる p_0, q_0 をとり，p_0, q_0 のうち少くとも1つが Λ 上にあれば $d(M) \leqq \pi$ となるから従って両方とも Λ 上にない場合を考えよう。$\Lambda \in G(p_0, p_0)$ をとり（再び $q_0 \notin \Lambda$ なる場合を考えるので）$d(q_0, \Lambda) = d(q_0, r_0)$ なる $r_0 \in \Lambda$ を定める。このとき (p_0, q_0, r_0) を頂点とする測地三角形に定理5を適用すれば直ちに $d(p_0, q_0) \leqq \pi$ となる。その後の議論は定理9に含まれる。

命題5.1 (Nakagawa-Shiohama [14])

M は $0<\delta \leqq K_\sigma \leqq 1$ を満たし、M の一点 p で、$C(p)$ 上の任意の点 q に対して $d(p,q)=\pi/2\sqrt{\delta}$ を満たす p が存在したと仮定する。そのとき p から出る測地線は全て長さ $\pi/\sqrt{\delta}$ の閉測地線である。

以下にこの命題の証明を示す。

補題5.2　$C(p) \neq \{q\}$ のとき、$C(p)$ の任意の二点 q, r に対して $G(q, r)$ 内の任意の σ は $C(p)$ に含まれる(点集合として)。

補題5.3　任意の $\gamma \in G(p, q)$ に対して次が成立する。

(1)　$\langle \gamma'(\pi/2\sqrt{\delta}), \sigma'(0) \rangle = 0$　但し $\sigma \in G(q, r)$

(2)　X を γ に沿う平行ベクトル場で、$X(\pi/2\sqrt{\delta}) = \sigma'(0)$ とするとき、$K(X(s), \gamma'(s)) = \delta$ が $s \in [0, \pi/2\sqrt{\delta}]$ に対して成立する。

(3)　$Y(s) \equiv \sin(\sqrt{\delta} s) X(s)$ は γ に沿う Jacobi field である。

補題5.4　q を $C(p)$ 内に任意に固定したとき、$M_q^0 \subset M_q$ を、q を通る $C(p)$ 内の曲線の q に於ける接ベクトルの全体の集合とする。このとき M_q^0 は M_q の部分空間である。

補題5.5　$M_q^\perp$ を M_q^0 の M_q に対する直交補空間としたとき、任意の $X \in M_q^\perp$, $\|X\| = 1$ に対して $\exp_q(\pi/2\sqrt{\delta})X = p$ が成立する。

これらの補題の証明は Nakagawa-Shiohama [14] による。これらは Berger [2] の証明法と全く平行な議論である。補題5.5により証明が完結する。

又、定理の後半の証明は S^n に同相なコンパクト対称空間(rank 1)は球のみであるから自明である。

注意17.　$C(p) = \{q\}$, $d(p, q) = \pi$ に関連して次が云える。

命題 5.6 (Nakagawa [10])

Mはコンパクト，連結なリーマン多様体で $K_\sigma \leqq 1$ が任意の 2-plane section σ に対して成りたつとする。Mに一点 p が存在して $C(p)=\{q\}$, $d(p,q)=\pi$ とすれば，Mは S_1^n に等長である。

この仮定には単連結性と正曲率であることが不要であることに注目すべきであろう。

Ⅳ、定理 3.4 の証明。

Mの universal covering manifold を $\tilde{M}$, $\pi:\tilde{M}\to M$ を projection とする。$d(x,C(x)) \geqq \pi/k$ がMの任意の点 x に対して成りたつので，Mの長さ $2\pi/k$ の閉測地線分 γ は単純閉測地線になる。このとき $\tilde{M}$ の閉測地線 $\tilde{\gamma}$ で，$\pi\circ\tilde{\gamma}=\gamma$ となるものが存在する。$L(\tilde{\gamma})=2\pi$ となることを示せば証明は終る。$\tilde{M}$ では $d(\tilde{x}, C(\tilde{x})) \geqq \pi$ が任意の $\tilde{x}\in\tilde{M}$ に対して成立しているので，$L(\tilde{\gamma}) \geqq 2\pi$ でなければならぬ。さて $\tilde{\gamma}(0)$, $\tilde{\gamma}(2\pi/k)$, $\tilde{\gamma}(4\pi/k)$, $\ldots$, $\tilde{\gamma}(2(k-1)\pi/k)$ は π により $\gamma(0)$ に写されるので，$\pi_1(M)=Z_k$ によって $\tilde{\gamma}(2\pi)=\tilde{\gamma}(0)$ でなければならぬ。故に $L(\tilde{\gamma})=2\pi$ であり，従ってMは曲率1の定曲率空間である。

注意 18. 偶数次元，完備正定曲率リーマン多様体は球又は実射影空間である。従って $\pi_1(M)=Z_k$ $(k\geqq 3)$ の場合にMの次元は奇数でなければならない。

さて、定理3.4に述べたMは$(2m+1)$-次元定曲率リーマン多様体であるが、特に長さ$2\pi/k$の閉測地線すを許容することから、Mの詳細な構造（例えば運動群を決定するとか）が調べられないであろうか？ $\pi_1(M)=Z_k$ なる仮定は $\pi_1(M)=Z_3$ なる仮定におき変えても良いであろう（少くとも以下の補題5.5—補題5.8までに議論を限れば）。以下では$(2m+1)$-次元リーマン多様体が $\pi_1(M)=Z_3$ をみたし、$1/4<\delta\leqq K_\sigma\leqq 1$ かつMに長さ$2\pi/3$の閉測地線が存在する場合を考える。

補題5.5　Mの任意の点gに対して、$d(g,C(g))=\pi/3$ が成立する。

証明。　$d(g,C(g))=l>\pi/3$ なる点が存在したと仮定する。Mは単連結でないから $d(M)\leqq\pi/2\sqrt{\delta}=\pi/2$。故に $l\leqq\pi/2$ でなければならぬ。従って単純閉測地線分Σ $\Sigma=\{\sigma(t)\}(0\leqq t\leqq 2l)$ $\sigma(0)=\sigma(2l)=g$ がMに存在する。$\tilde{M}$はS^n_1に等長であるから $\pi\circ\tilde{\Sigma}|[0\,2l]=\Sigma$ となる大円$\tilde{\Sigma}=\{\tilde{\sigma}(t)\}(0\leqq t\leqq 2\pi)$ が存在する。このとき $l=\pi/2$ が成立したと仮定すれば $\pi_1(M)=Z_3$ に矛盾するので $l<\pi/2$ が解る。$\pi(\tilde{\sigma}(0))=\pi(\tilde{\sigma}(2l))=\pi(\tilde{\sigma}(4l))=\sigma(0)$ で $\pi_1(M)=Z_3$ だから、$\tilde{\sigma}(6l)=\tilde{\sigma}(0)$ でなければならぬ。従って $6l=2\pi$ より仮定に反する。

補題5.6.　Mの任意の点gに対して $\mathrm{Max}\{d(g,x)\,|\,x\in M\}$

$=\pi/2$ であり、従って特に $d(M)=\pi/2$ である。

証明。 Mは単連結でないから補題4.2の対偶により、$d(M)\leqq\pi/2\sqrt{\delta}=\pi/2$ ($\delta=1$ だから)が成立する。従って、$\mathrm{Max}\{d(q,x)\mid x\in M\}=l=d(q,r)$ とおいたとき、$l=\pi/2$ を示せば証明は終る。補題5.5より $\Sigma_r=\{\sigma_r(t)\}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi/3)$ $\sigma_r(0)=\sigma_r(2\pi/3)=r$ なる閉測地線 Σ_r が存在する。r は q からの最遠点であるから補題4.5に基ずき、$G(q,r)$ には少くとも2つの最短測地線分がある。$\gamma_1,\gamma_2\in G(q,r)$, $\gamma_1\neq\gamma_2$ とするとき、$\measuredangle(\gamma_1'(l),\gamma_2'(l))\in(0,\pi)$ である。実さいに、$\measuredangle(\gamma_1'(l),\gamma_2'(l))=\pi$ と仮定すれば $\tilde{M}$ には q の原像が4つ以上存在するから矛盾を生ずる。従って、再び補題4.5を用いて、$+(\gamma_1'(l)+\gamma_2'(l))\in M_r$ となす角が、$\pi/2$ 以下の $\gamma_3\in G(q,r)$ が存在する。$\tilde{q}\in\tilde{M}$ で、$\pi(\tilde{q})=q$ なる点を一つ固定する。$\pi\circ\tilde{\gamma}_i=\gamma_i$ は $\tilde{\gamma}_i(0)=\tilde{q}$ をみたすものとする。$\pi\circ\tilde{\Sigma}_r=\Sigma_r$ をみたす $\tilde{\Sigma}_r$ は $\tilde{M}=S_1^n$ 上の大円であり、$\tilde{\gamma}_i(l)\in\tilde{\Sigma}_r$ は自明である。従って S_1^n 上に3つの二等辺測地三角形が存在する。明らかに、それらの底角は全て $\pi/2$ でなければならぬから、余弦法則を適用すれば直ちに $\cos l=0$ となり、$l=\pi/2$ でなければならぬ。

注意19. $\pi_1(M)=\mathbb{Z}_k$ の場合の議論でも、$G(q,r)$ 上に、少なくとも3本の相異なる最短測地線分が存在すれば十分

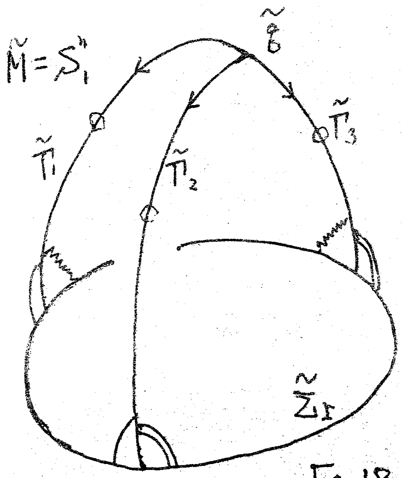


Fig18

である。又、このことから直ちに $d(q,\sigma_r(t))=\pi/2$ が任意の $t\in[0,2\pi/3]$ に対して成立していることが解る。

補題5.5に基ずき、M の各点 x に於て x を通る長さ $2\pi/3$ の単純閉測地線が存在する。それを Σ_x と書くことにする。以下 $d(p,q)=\pi/2$ なる2点を固定する。

補題5.7. $d(p,q)=\pi/2$ を固定する。$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3\in G(pq)$ に対して次のことが成立する。

(1) $\measuredangle(\gamma_i'(0),\gamma_{i+1}'(0))=2\pi/3$, $\measuredangle(\gamma_i'(2\pi/3),\gamma_{i+1}'(2\pi/3))=2\pi/3$

$i=1,2,3 \pmod 3$.

(2) $\Sigma_q,\Gamma_{i+1},\Gamma_{i+2}$ を境界にもつ全測地的曲面片 $\mathfrak{F}_i$ が存在し、$\mathfrak{F}_i$ は測地線分族 $\Lambda_t\in G(\sigma_q(t),p)$, $\Lambda_t=\{\lambda_t(s)\}$ $(0\leqq s\leqq\pi/2)$ により生成されていて、$t\longrightarrow\lambda_t'(0)$ は Σ_q に沿う平行ベクトル場であり、$\lambda_t'(0)=-\gamma_{i+1}'(0)$, $\lambda_t'(2\pi/3)=-\gamma_{i+2}'(0)$ をみたす。

(3) $\pi\circ\tilde{\Gamma}_i=\Gamma_i$ なる S_1^n 上の四分円で $\tilde{\gamma}_i(0)=\tilde{p}$ $(i=1,2,3)$ なる $\tilde{p}$ と $\tilde{\Gamma}_i$ とを固定したとき、$\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2\cup\mathfrak{F}_3$ は S_1^n 上の $\tilde{\Sigma}_q$ を赤道, $\tilde{p}$ を北極とみたときの、$\tilde{\Gamma}_i$ を含む2次元半球の π による像である。

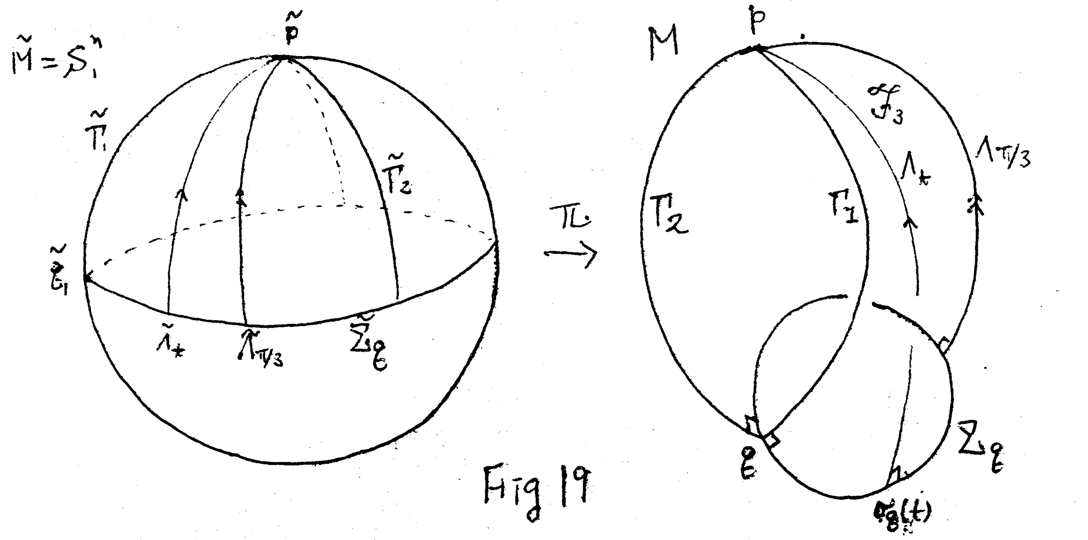


Fig 19

証明。

$\tilde{\Sigma}_q$, $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$ を含む2次元半球上で $\tilde{\Lambda}_t \in G(\sigma_q(s), \tilde{p})$ を考える。$\tilde{q}_1 = \tilde{\gamma}_1(\pi/2)$ とおき、$d(\tilde{q}, \tilde{\lambda}_t(s)) < \pi$ であるから、この半球面上で測地線族 $G(\tilde{q}_1, \tilde{\lambda}_t(s))$ $(0 \leqq s \leqq \pi/2)$ を $\tilde{M}_{\tilde{q}_1}$ 内にliftして、Rauchの定理を用いれば証明は完結する。

補題5.8　$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ を補題5.7の全測地的曲面片としたとき $\Lambda_{\pi/3}, \Lambda_{\pi}, \Lambda_{5\pi/3}$ は $C(q)$ に含まれる。

証明。　$\Lambda_{\pi/3} \subset \mathfrak{F}_3$ 上の点 $\lambda_{\pi/3}(s)$ は $\mathfrak{F}_3$ 上の2本の等長な測地線分で q と結ばれる。これらがMの最短測地線分(q, $\lambda_{\pi/3}(s)$ を結ぶ)でなかったと仮定すれば、$\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$ 上にはないMの最短測地線分 $\Phi \in G(q, \lambda_{\pi/3}(s))$ が存在する。このとき $\tilde{M}$ 上には π により $\lambda_{\pi/3}(s)$ にmapされる点が少なくとも6点は存在し、従って $\pi_1(M) = Z_3$ に反する。

注意20　$\mathfrak{F}^+ = \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$ とおき、$\sigma_p(\pi/3)$ を P と思

って、$\sigma_p(\pi/3)$, Σ_q に対して上述の議論を繰り返せば、$\gamma_i|[\pi/2,\pi]$, $\gamma_{i+1}|[\pi/2,\pi]$ と Σ_q を境界にもつ全測地的曲面片 $\mathcal{F}_{i+1}^-$ と $\mathcal{F}^- = \mathcal{F}_1^- \cup \mathcal{F}_2^- \cup \mathcal{F}_3^-$ とを得る。ここで $\mathcal{F}_{p,q} = \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$ とおくと、$\mathcal{F}_{p,q}$ は $\tilde{\gamma}_i[0,\pi]$ と $\tilde{\Sigma}_q$ とを含む S_1^n 内の2次元部分空間の π による image であり、この2次元球面の赤道 $\tilde{\Sigma}_q$ は Σ_q を3回 cover している。π をこの2次元球面に制限すれば、π は isometric immersion である。又 $\mathcal{F}_{p,q}$ の q に於る接空間は $\sigma_q'(0)$ を含む3枚の2次元平面で、交角が夫々 $2\pi/3$ ずつのものである。

注意21. $A_p \equiv \{x \in M \mid d(p,x) = \pi/2\}$ なる M の部分集合は Σ_q を含んでいるが一般に $\Sigma_q \supset A$ は成立しない。A の任意の点 x に於る Σ_x は A に含まれる。従って A は長さが $2\pi/3$ の閉測地線の集合よりなる。$\dim M = 3$ のとき、$A = \Sigma_q$ であるが、$\dim M$ に depend して A 内の閉測地線の個数が決まれば M の構造はよく解るはずである。

注意22. $\mathcal{F}_{p,q}$ の p に於る接空間は1枚の平面であり、それは $\sigma_p'(0)$ に直交している。従って $\mathcal{F}_{q,p}$ (q 北極、Σ_p 赤道で p が東経0度と考えた曲面) の q に於る接空間が $\mathcal{F}_{p,q}$ の q に於る3枚の接平面に垂直で、その交わりは $\gamma_1'(\pi/2)$, $\gamma_2'(\pi/2)$ $\gamma_3'(\pi/2)$ である。

次に $\mathcal{F}_{\sigma_p(t),q}$ を考えよう。$\mathcal{F}_{\sigma_p(t),q}$ の q に於る接平面は3

枚の接平面で、互いにとなり合う２平面の交角は $2\pi/3$ であり、$\mathfrak{F}_{p,g}$ のそれらを角 t だけ回転させたものである。
かくして合同な２次元全測地的曲面族 $\mathfrak{F}_{\sigma_p(t),g}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ が得られた。この曲面族の g に於ける接平面全体の集合は M_g 内の３次元部分空間を張っている。

Ⅴ．定理3.4の証明。

M の一点 p に於ける tangent cut locus C_p とは次の如く定義された M_g の部分集合のことである。

$C_p = \{X \in M_p \mid \exp_p X$ は測地線 $t \to \exp_p t\frac{X}{\|X\|}$ に沿う p の cut point である$\}$.

我々は (1-k) type のレンズ空間の tangent cut locus の構造を調べるのであるが $L(1,3)$ が最も基本であり、$L(1,3)$ の tangent cut locus が解れば、一般の $L(1,k)$ の tangent cut locus も全く同様の議論から解るので、以下 $L(1,3)$ を調べる。

$M^* = L(1,3) \equiv S^3_1/G$ とおく。G は order 3 の cyclic group で、G の生成元 σ は $\sigma = \begin{bmatrix} R(1/3) & \\ & R(1/3) \end{bmatrix}$ を満たすとする。
M^* 上の任意に固定された一点 g^* に於ける $C^*_{g^*} \subset M^*_{g^*}$ が、M 上の任意の点 g に於ける $C_g \subset M_g$ と合同であり、cut locus としての構造（identification の構造）までこめて両者が一致していることを主張すれば、τ_g を $M_g \to M^*_{g^*}$ への適当な isometric isomorphism としたとき、$\exp_{g^*} \circ \tau_g \circ \exp_g^{-1}$ によ

りMからM*へのglobal isometryを得る。

以下、$C^*_{g^*}$の構造を調べる。Gはorder 3のcyclic groupでGの生成元gは$g=\begin{bmatrix} R(1/3) & \\ & R(1/3)\end{bmatrix}$とする。但し$R(\theta)$は回転$R(\theta)=\begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta, & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta, & \cos 2\pi\theta \end{bmatrix}$を表わすものとする。

S^3_1上の任意の点xに対して$g(x)+g^2(x)+g^3(x)=0$だから$g(x), g^2(x), x$は同一の大円周上にあり、それを三等分している。これは補題9.5の事情とよく合致している。

$S^3_1 \subset E^4$の局所座標(u, v, w)をE^4のorthonormal basis (e_1, e_2, e_3, e_4)を用いて$x=x(u,v,w)=e_1\cos u\cos v+e_2\sin u\cos v+e_3\sin v\cos w+e_4\sin v\sin w$で定義する。但し$(u,v,w)$の定義域は$-\pi/2<u<\pi/2$, $0<v<\pi/2$, $\pi/2<v<\pi$, $-\pi/2<w<\pi/2$。$w=w_0$ (const.)で定義される曲面は$e_1\cos u+e_2\sin u$を赤道にもち$e_3\cos w_0+e_4\sin w_0$を北極にもつ2次元球面(の一部)であるから、S^3_1は$\Sigma=\{\sigma(u)\}(0\leqq u\leqq 2\pi)$。$\sigma_u=e_1\cos u+e_2\sin u$を赤道にもち、大円$e_3\cos w+e_4\sin w$上に両極をもつ2次元球面族により生成されたとみなすことが出来る。$w=0$で定義される$S^2_{e_3}=\{e_1\cos u\cos v+e_2\sin u\cos v+e_3\sin u \mid -\pi/2<u<\pi/2, 0<v<\pi/2, \pi/2<v<\pi\}$にGが作用する様子を調べよう。$S^2_p$は$p=e_3\cos w+e_4\sin w$を北極にもち、$e_1\cos u+e_2\sin u$を赤道にもつ2次元球面を表わすものとする。$\forall x\in S^2_{e_3}$

に対して、$x = e_1\cos u\sin v + e_2\sin u\sin v + e_3\cos v + e_4\cdot 0$ ゆえ $g(x) = e_1\cos(u-\frac{2\pi}{3})\sin v + e_2\sin(u-2\pi/3)\sin v + e_3\cos 2\pi/3\cdot\cos v - e_4\sin 2\pi/3\cdot\cos v$。従って赤道上の点は $g\in G$ により赤道上の $2\pi/3$ 回転した点に移り、赤道上にない点は $g\in G$ により $S^2_{e_3}$ 外の点に移される。$q=(1,0,0,0)$, $p=(0,0,1,0)$ とし、p と σ_u とを結ぶ四分円を Γ_u とおく。π を S^3_1 から M^* への projection としたとき $\pi(S^2_p)$ は M^* 内の self-intersection を持つ全測地的曲面で $\Sigma^*=\pi\circ\Sigma$ は M^* の長さ $2\pi/3$ の閉測地線であり Σ により3回 cover される。以下 π による像を (*) をつけて表わすことにする。S^2_p 上の他の点では $\pi|S^p_2 : S^p_2 \to \pi(S^p_2)$ は 1-1 であり、$p^*=\pi\circ p$ と Σ^* 上の点 $\sigma^*(u)$ との距離は $\pi/2$ である。実さい $G(p^*,\sigma^*(u))$ 内に $\pi/2$ 未満の長さをもつ測地線分が存在したと仮定すると、π による lift を作ることにより $d(p,\sigma(u))<\pi/2$ となり矛盾を生ずる。又、$G(p^*,\sigma^*(u))$ は3本の長さ $\pi/2$ の測地線分よりなり、それらは $\Gamma^*_u, \Gamma^*_{u+2\pi/3}, \Gamma^*_{u+4\pi/3}$ であり、且つ p^* に於るそれらの交角は $2\pi/3$ なることが解る。$\sigma^*(u)$ に於るそれらの交角を測るには、$\sigma^*(0)=q^*$ に於る場合と全く同じであるから $\Gamma^*_0, \Gamma^*_{2\pi/3}, \Gamma^*_{4\pi/3}$ の q^* に於る交角を測ればよい。明らかに $\Gamma^*_{2\pi/3}=\pi\cdot(\sigma^2\Gamma_{2\pi/3})$, $\Gamma^*_{4\pi/3}=\pi(\sigma\cdot\Gamma_{4\pi/3})$ であり、$\Gamma_0, g^2\Gamma_{2\pi/3}, g\Gamma_{4\pi/3}$ の q に於る交角は $2\pi/3$ ゆえ、

q^*に於る Γ_0^*, $\Gamma^*_{2\pi/3}$, $\Gamma^*_{4\pi/3}$ の交角も $2\pi/3$ である。(Fig 20)

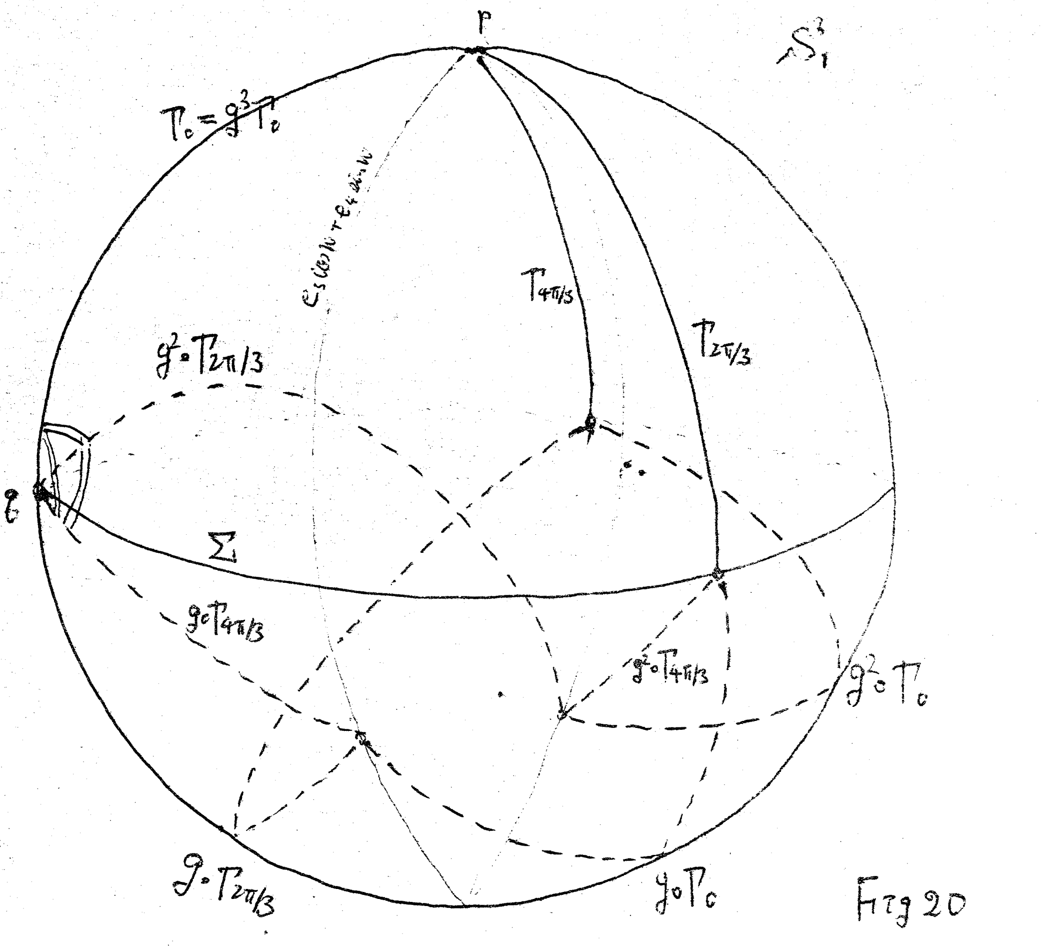


Fig 20

注意22. $L(1,k)$ のときの $\Gamma_0^*, \Gamma^*_{2\pi/k}, \dots, \Gamma^*_{2(k-1)\pi/k}$ の q^*, p^* に於る交角は全て $2\pi/k$ となる。

さて $C^*_{q^*}$ を調べるために M^* の cut locus に注目する。$\pi\circ S^2_p$ 上の q^* の cut locus が $C^*(q^*)$ に含まれていることを主張する。$\pi\circ S^2_p$ 上の q^* の cut locus は明らかに $\gamma^*_{\pi/3}|[0,\pi]$, $\gamma^*_{\pi}|[0,\pi]$, $\Gamma^*_{5\pi/3}|[0,\pi]$ である。実さい $\Gamma_{\pi/3}|[0,\pi]$ は $\sigma(0)$, $\sigma(2\pi/3)$ から等距離にあり任意の $\Lambda\in G(q,\gamma_{\pi/3}(t))$ $t\in[0,\pi]$

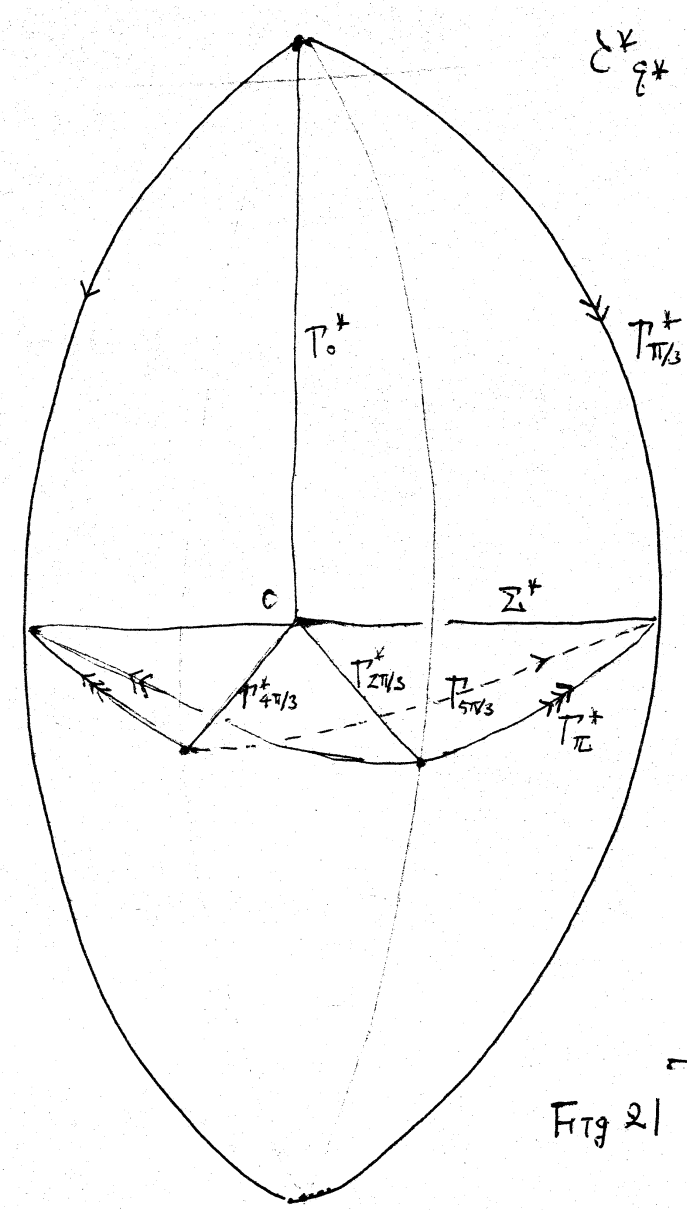
に対して $\Lambda^* \in G(\gamma^*, \gamma^*_{\pi/3}(\pi))$ となることは自明であるから $\Gamma^*_{\pi/3}|[0,\pi]$ は $\pi \circ S_p^2$ 上で γ^* の cut locus に含まれる。更に $\Gamma^*_{\pi/3}|[0,\pi] \subset C^*(\gamma^*)$ (M^* の cut locus) なることが容易に示され、$\Gamma^*_{\pi}|[0,\pi]$, $\Gamma^*_{5\pi/3}|[0,\pi]$ についても同様である。γ^* に於る $\pi \circ S_p^2$ の接平面が3枚あることに注意して、任意の単位接ベクトル (γ^* に於る) X^* をとる。X^* が属する接平面に対応する一葉の全測地的曲面片が S_p^2 を3本の大円弧 $\Gamma_{\pi/3}|[0,\pi]$, $\Gamma_{\pi}|[0,\pi]$, $\Gamma_{5\pi/3}|[0,\pi]$ で分けた一つの component の π による image であるから、X^* 方向の cut locus ($\pi \circ S_p^2$ 上の) は $\Gamma^*_{\pi/3}|[0,\pi]$, $\Gamma^*_{\pi}|[0,\pi]$, $\Gamma^*_{5\pi/3}|[0,\pi]$ に含まれている。故にこの3本の測地線分が $\pi \circ S_p^2$ 上の γ^* の cut locus であることが解る。かくして $\pi \circ S_p^2$ 上の γ^* の tangent cut locus の内部はレンズ型をした交角 $\pi/3$ の等角をなす6枚の羽根 (プロペラー) より出来ていて、その軸 (シャフト) の長さ $\pi/3$, 羽根の長さ $\pi/2$ であり、羽根の半分を第1象限内に極座標により表示すれば $\sqrt{3}\cot r = \cos\theta$ である。

次に $\pi \circ S_p^2$ 上の γ^* の cut locus が $C^*(\gamma^*)$ に含まれていることが解るので、任意の w に対して、北極を $e_3\cos w + e_4\sin w$ として $S^2_{e_3\cos w + e_4\sin w}$ について同様の議論を繰り返すことにより $C^*(\gamma^*)$ が完全に求まる。[(η, ν, w) が定義されない所では適当な変換を行って cover しておく]。実さい、任意の

単位接ベクトル $X^* \in M^*_{q^*}$ に対して $X^* = \sigma^{*\prime}(0)\cos\alpha + Y^*\sin\alpha$
$\|Y^*\|=1$, $\langle Y^*, \sigma^{*\prime}(0)\rangle = 0$, $Y^* \in M^*_{q^*}$ と表わせる。Y^*に対して $p' = e_3\cos w + e_2\sin w$ なるwで、$Y^* \in (\pi\circ S^2_{p'})_{q^*}$ となるwが存在する。従って $\exp_{q^*} tX^*$ で定義されたM^*の測地線に沿うq^*の cut point は $\pi\circ S^2_{p'}$ 上での $\exp_{q^*} tX^*$ に沿うq^*の cut point と一致し、その長さrは $\sqrt{3}\cot r = \cos\alpha$ で与えられる。　プロペラーのふちの前半は1つとなりのプロペラーのふちの後半に identify され、特にプロペラーの原点0からの最遠点は$2\pi/3$, $4\pi/3$回転したプロペラーの最遠点に identify される。

さて $\tau_q: M_q \longrightarrow M^*_{q^*}$ を isometric isomorphism で、$\tau_q(\sigma_q'(0)) = \sigma^{*\prime}(0)$, $\tau_q(\gamma_1'(\pi/2)) = \gamma^{*\prime}_0(\pi/2)$ を満たすものとする。　$\mathfrak{F}_i$ は S^2_1 上の直角二等辺三辺形で底辺の長さが$2\pi/3$なるもののπによる像であったから$\mathfrak{F}_i$上のqの tangent cut locus は極座標(r,θ)による表示で $\sqrt{3}\cot r = \cos\theta$ となることは自明である。又、C_q の identification の構造が $C^*_{q^*}$ のそれと全く同じであることも解ったので τ_q により C_q と $C^*_{q^*}$ とは完全に合同である。　又 C_q, $C^*_{q^*}$ はともに夫々 $\exp_q$, $\exp_{q^*}$ が maximal rank をもつ M_q, $M^*_{q^*}$ の近傍内に含まれているので $\exp_{q^*}\circ\tau_q\circ(\exp_q|U_\pi)^{-1}$ により M と M^* とは等長になる。

証明終り。



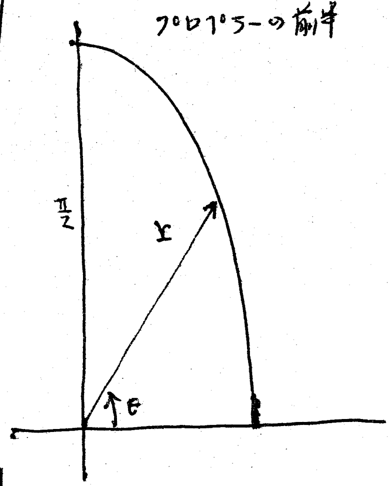


Fig 21

注意23. $L(1,k)$の場合，プロペラーの前半を第一象限内に極座標を用いて表わせば $\cot r = \cot \pi/k \cdot \cos\theta$ となる。

§6 補遺

ここでは Klingenberg [8] の問題点を指摘する。ここに限り notation は全て [8] そのままを用いることにする。

以下 M は n-次元 $(n \geqq 3)$ complete，単連結なリーマン多様体で $1/4 \leqq K_\sigma \leqq 1$ をみたすものとする。

Basic Lemma (Klingenberg [8]).
M は完備連結なリーマン多様体で、$K_\sigma \leqq C$ をみたす正数 C が存在するものとする。M の2点 p, q に対して、$\Omega(p,q)$ を p から q への M 上の piecewise smooth な曲線の全体としたとき、$\Omega(p,q)$ 内の2本の異なる測地線分 G_0, G_1 で $L(G_0) \leqq L(G_1)$ をみたし，かつ，$H_t \in \Omega(p,q)$，$0 \leqq t \leqq 1$ なるホモトピー H_t で $H_0 = G_0$，$H_1 = G_1$ をみたすものが存在するならば、
$\mathcal{L}(G_0) + \mathcal{L}(H_{t_0}) \geqq 2\pi/\sqrt{C}$ をみたす $t_0 \in [0,1]$ が存在する。
但し $H \in \Omega(p,q)$ に対して $\mathcal{L}(H)$ は H の長さを表わす。

これは、例えば [12] の p198 の Lemma と本質的に同じであり、正しく follow できるので証明は省略する。

注意24. Lemma の仮定の下に t_0 を $\mathcal{L}(G_0) + \mathcal{L}(H_t) = 2\pi/\sqrt{C}$ となる t の最小値としたとき、G_0, H_{t_0} は Fig 22 の如く測地二辺形となり，p 以外の頂点 r までの p からの長さは $\pi/\sqrt{C}$ となる。

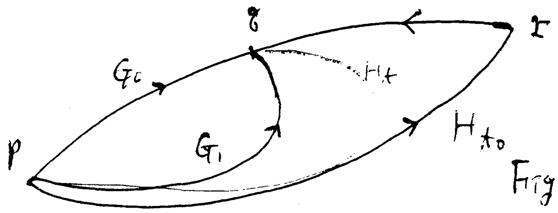


Fig 22.

このLemmaを用いて次の定理を証明したい。

定理1. Mはコンパクト単連結なリーマン多様体で $1/4 \leqq K_\sigma \leqq 1$ としたとき、Mの任意の点 p に於て $d(p, C(p)) \geqq \pi$ が成立する。

ここで $\dim M$ が偶数の場合はすでに証明されているので $\dim M \geqq 3$ なる仮定の下に証明したい。定理1の仮定の下に結論を否定すれば $L(G) < 2\pi$ なる単純閉測地線がMに存在する。以下論文に従ってこの定理の証明のために4つの補助定理を用意する。補助定理1は正しい。補助定理2と3とはいずれも信用すべき根拠を見出せない。補助定理4は補助定理2, 3を基盤としているのでここでは省くことにする。以下 $\dim M \geqq 3$, かつ定理1の仮定をみたすMのみを考える。

補助定理1. $\Omega(p,\varepsilon)$ は non-degenerate とする。$G_0, G_1 \in \Omega(p,\varepsilon)$ $G_0 \neq G_1$ なる測地線分で $\mathcal{L}(G_0) + \mathcal{L}(G_1) < 2\pi$ が成立したと仮定する。このときホモトピー $H_t \in \Omega(p,\varepsilon)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で

$$H_0 = G_0,\ H_1 = G_1 \text{ かつ } \mathcal{L}(H_t) < 2\pi \text{ for any } t \in [0,1]$$

をみたすものが存在する。特に $\mathrm{Max}\{\mathcal{L}(H_t) \mid 0 \leqq t \leqq 1\} = \mathcal{L}(H_{t_0})$ をみたす H_{t_0} は測地線であり、$\mathrm{Ind}\, H_{t_0} \leqq 1$ をみたす。

証明。$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to M$ は $\tilde{H}_t \in \Omega(p,\varepsilon)$, $\tilde{H}_0 = G_0$, $\tilde{H}_1 = G_1$ なるホモトピー(連続写像)としたとき。矩形の境界が C^∞ 級であるから、内部を変形して piecewise smooth な

Hでおきかえることができる(Whitney)。このHに対してよく知られたbroken geodesicへの変形を行えばH_tが測地線でないときはこの変形により、より短いbroken geodesicに移り，H_tが測地線のときは長さは変わらない。$\Omega_{p,q}$はnon-degenerateであるからH内の長さ2π以上の測地線H_tは$\mathrm{Ind}\,H_t \geqq n-1 \geqq 2$をみたす。従ってこの場合も変形して$\mathrm{Ind}\,H_t \leqq 1$とすることが可能である(Morseの定理，[12]，p249)。かくしてH内の測地線はIndexが1以下となるように変形された。Ω^{α}_{pq}内には測地線は有限個しか存在しないので上記の変形を有限回くり返すことにより結論を得る。

補助定理2. Gは$\mathcal{L}(G)<2\pi$をみたすMの閉測地線とする。G上の点pに対して$H_t\in\Omega(p,p)$なるホモトピーで$H_0=\{p\}$, $H_1=G$かつ，$\mathcal{L}(H_t)\leqq 2\pi$ for all $t\in[0,1]$をみたすHが存在する。特に，$\mathcal{L}(H_t)=2\pi$のときにはH_tは測地線である。

証明. pに関して$\Omega(p,q_i)$がnon-degenerateな点列$\{q_i\}$で$\lim_{i\to\infty} q_i = p$なるものを次の様にとる。

Gのpに於る単位接ベクトルをAとし$\exp_p \ell A = p$とおいたとき$(\ell-\varepsilon_i)A$が$\exp_p$のcritical pointでない$\varepsilon_i\downarrow 0$がとれる。このとき$(\ell-\varepsilon_i)A$の近傍$U_i$が存在し$\exp_p|U_i$がlocal diffeo.

に対応するように出来る。さて $\exp_p(U_i)$ 内には $\Omega(p,g)$ が non-degenerate となるような g_i がとれる。

さて、この $\{g_i\}$ の選び方から $G_0^i, G_1^i \in \Omega(p,g_i)$ なる2本の測地線分で、$\lim G_0^i = \{p\}$, $\lim G_1^i = G$ なる G_0^i, G_1^i が存在する。仮定より番号 N が存在して、$i>N$ なる任意の i に対して $\mathcal{L}(G_0^i) + \mathcal{L}(G_1^i) < 2\pi$ が成立するので、このとき補助定理1の仮定がみたされる。故に $H_t^i \in \Omega(p,g_i)$ なるホモトピーで $H_0^i = G_0^i$, $H_1^i = G_1$, $\mathcal{L}(H_t) < 2\pi$ なるものが存在する。このホモトピーの族 H_t^i から結論の H が作れるとしているが大きな論理の飛躍があると思われる。

我々は補助定理2が正しいと仮定して先に進む事にしよう。

補助定理3　閉測地線 G で $\mathcal{L}(G) < 2\pi$ なるものが M に存在したと仮定する。$p \in G$ を任意に固定したとき、ホモトピー $H_t \in \Omega(p,p)$ で、$H_0 = \{p\}$, $H_1 = G$, 更に $\mathcal{L}(H_t) \leqq 2\pi$ をみたし更に、$\mathcal{L}(H_t) = 2\pi$ となる t の最小値を t_0 とおいたとき、H_{t_0} は次の条件をみたす。

(1)　H_{t_0} は長さ 2π の閉測地線である。

(2)　H_{t_0} 上の各点 $H_{t_0}(s)$ に於て、H_{t_0} に接する plane section $\sigma_s = (H_{t_0}'(s), X(s))$ で $K_{\sigma_s} = 1$ をみたし，更に σ_s に垂直な σ^* に対しては $K_{\sigma^*} = 1/4$ が成立するような σ_s が存在し，且つ σ_s は H_{t_0} に平行である。

(3) $\bar{p}$ を H_{t_0} 上の p の対点とする。$p, \bar{p}$ を結ぶ測地線分族 $G(\alpha)$, $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ で $\mathcal{L}(G(\alpha)) = \pi$ かつ、p に於る $G(\alpha)$ と H_{t_0} との交角が α となるものが存在する。

注意25. (3) は $\{G(\alpha)\}$ が 2次元の半球（半径 1 の）をなし、H_{t_0} がその半球の境界（赤道）になっていることを主張している。

証明。$t < t_0$ に対しては $\exp_p$ を通して M_p に H_t の lift が作れる。$M^* \equiv S^n_1$ とおいて、M^* 上に H_t に対応する H_t^* を（$t < t_0$ に対して）作ることが可能である。このとき Rauch の定理より $\mathcal{L}(H_t^*) \leqq \mathcal{L}(H_t) < 2\pi$　$0 \leqq t < t_0$ が成立する。$t \to t_0$ としたとき、H_t^* は S^n_1 上のある curve $H_{t_0}^*$ に収束する。実さい s を H_t の弧長に比例した $[0,1]$ にとられた H_t のパラメーターとする。$s \in [0, 1/2)$ に対しては $H_{t_0}|[0,\frac{1}{2}]$ の lift は作れる。lift が作れない点は $H_{t_0}|[\frac{1}{2},1]$ であるがパラメーターを逆向きにすれば $H_{t_0}|[\frac{1}{2},1]$ も lift が作れることが容易に解る。従って $s \neq \frac{1}{2}$ に対しては $\lim_{t \to t_0} H_t^*(s) = H_{t_0}^*(s)$ が成立し、$H_{t_0}(1/2)$ が lift できない。しかし長さの関係から $\lim_{s \to \frac{1}{2}} H_{t_0}^*(s) \to \bar{p}^*$（$\bar{p}^*$ は p^* の対点）。従って H_t^* はある二辺形 $H_{t_0}^*$ に収束することが解った。ここまでは良いが次が問題である。

H_{t_0} は $\bar{p}$ に於て平角 π 故 $H_{t_0}^*$ も $\bar{p}^*$ で平角 π となる。故に $H_{t_0}^*$ は p^* でも平角となるので H_{t_0} は閉測地線である。

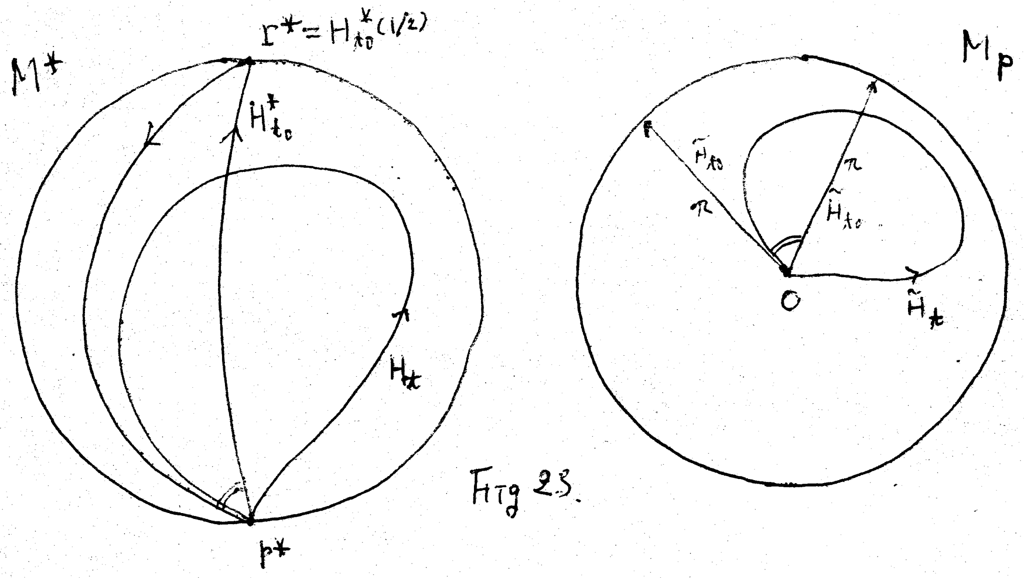


Fig 23.

$M^* = S^n_1$ であるから

A : $H^*_{t_0}$ の r^* に於る角が π となることは、$H^*_{t_0}$ の p^* に於る角が π となることと同値である。

$\tau_p : M_p \longrightarrow M^*_{p^*}$ は isometric isomorphism ゆえ

B : $H^*_{t_0}$ の p^* に於る角が π となることは、H_{t_0} の p に於る角が π となることと同値である。

従って A, B より「r^* に於る $H^*_{t_0}$ の角が π となる」ことと「p に於る H_{t_0} の角が π となる」こととは同値な関係にあることが解る。

一方 smooth curve H^*_t の極限 $H^*_{t_0}$ は一般に連続曲線であるから、r^* に於る $H^*_{t_0}$ の角が π となることは証明を要する事であって明白な事ではない。 実さい $r^* = H^*_{t_0}(1/2)$ に於て微分可能性が保証されていないから尚更の事である。

これらの理由により、我々はKlingenbergの[8]を認めることが出来ない。

文献

[1] M. Berger, Les variétés riemanniennes (1/4) pincées, Ann. Scuola, Nor. Sup., Pisa. 14(1960), 161-170.

[2] 〃 Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées, Bull. Soc. math. France 88(1960), 57-71.

[3] 〃 Sur les variétés à courbure positive de diamètre minimum, Comm. Math. Helv. 35(1961), 28-34.

[4] R. Bott, On manifolds all of whose geodesics are closed, Ann. of Math., 64(1954), 357-382.

[5] W. Klingenberg, Contributions to Riemannian Geometry in the large, Ann. of Math., 69(1959), 654-666.

[6] 〃 Neue Ergebnisse über Konvexe Flächen, Comm. Math. Helv., 34(1960), 17-36.

[7] 〃 Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, Comm. Math. Helv. 35(1961), 47-54.

[8] 〃 Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung, Ann. di Math., 60(1962), 49-59.

[9] H. Nakagawa, A Note on theorems of Bott and Samelson, J. Math. Kyoto Univ., 7(1967), 205-220.

[10] H. Nakagawa, Riemannian manifolds with many geodesic loops, J. Math. Soc. Japan, 20(1968), 648-654.

[11] S.B. Myers, Riemannian manifolds in the large, Duke Math. J., 1(1935), 39-49.

[12] D. Gromoll - W. Klingenberg - W. Meyer, Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer-Verlag, 1968.

[13] K. Hatsuse and R. Takagi, On $W^{\pm}$ manifolds, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 10(1968), 10-16.

[14] H. Nakagawa and K. Shiohama, On Riemannian manifolds with certain cut loci, to appear.

[15] K. Shiohama, On the diameter of δ-pinched Riemannian manifolds, to appear.

[16] M. Sugimoto, On Riemannian manifolds with a certain closed geodesic, to appear.

[17] H. Rauch, A contribution to differential geometry in the large, Ann. of Math., 54(1951), 38-55.

[18] V.A. Toponogov, Оценка длины замкнутой геодезической на выпуклой поверхности, Докл. Акад. Наук, С.С.С.Р., 24(1959), 282-284.

[19] V. A. Toponogov, Riemannian spaces having their curvature bounded below by a positive number, Amer. Math. Soc. Transl. Ser, 39(1964), 291-336. (Uspehi Math. Soc., 14(1959), 87-130).

[20] Y. Tsukamoto, Closed geodesics on certain Riemannian manifolds of positive curvature, Tôhoku Math. J., 18(1966), 138-143.

[21] J. Wolf, Spaces of constant curvature, Mc-Graw-Hill, Inc.